



# Equations aux dérivées partielles en finance : problèmes inverses et calibration de modèle.

Moeiz Rouis

## ► To cite this version:

Moeiz Rouis. Equations aux dérivées partielles en finance : problèmes inverses et calibration de modèle.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2007. Français. NNT : . pastel-00003888

**HAL Id: pastel-00003888**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00003888>**

Submitted on 22 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Sujet:  
**EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN  
FINANCE: PROBLÈMES INVERSES ET  
CALIBRATION DE MODÈLE**

par Moeiz ROUIS

soutenue le 20 Septembre 2007 devant le jury composé de:

Mr Marco AVELLANEDA  
Mr Rama CONT  
Mme Nicole EL KAROUI  
Mr Jean-Pierre FOUQUE  
Mr Regis MONNEAU  
Mr Olivier PANTZ  
Mr Olivier PIRONNEAU

Rapporteur  
Directeur de these  
Président  
Rapporteur



*A mes parents...*



# Résumé

Dans la première partie de cette thèse, on a étudié l'impact sur les prix d'options des erreurs d'estimation de volatilité. Dans les modèles de diffusion utilisés en finance, un coefficient de diffusion fonctionnelle  $\sigma(.,.)$  modélise la volatilité d'un actif financier. Ce coefficient est estimé à partir d'observations donc entaché d'erreurs statistiques. L'objectif est de voir l'impact de ces erreurs sur le calcul de prix d'options, qui sont solutions d'EDP paraboliques dont l'estimateur  $\hat{\sigma}(.,.)$  est le coefficient de diffusion. Cela débouche sur un problème de passage à la limite (homogénéisation) dans des équations paraboliques à coefficients aléatoires. Dans ce travail on a obtenu des estimations de la vitesse de convergence locale sur la solution d'une EDP parabolique à coefficients aléatoire, lorsque le coefficient de diffusion est un champ aléatoire convergeant vers une fonction limite. Ce résultat permet d'étudier l'impact sur les prix d'options des erreurs d'estimation de volatilité dans différents cas de figures. Cette méthode est appliquée pour évaluer l'incertitude sur les options à barrières dans un modèle de diffusion lorsqu'on reconstitue la volatilité par la formule de Dupire à partir des données discrètes sur les prix d'options.

La deuxième partie de cette thèse concerne l'étude de problèmes inverses pour certaine classe d'équations d'évolution intégrô-différentielles survenant dans l'étude des modèles d'évaluation basés sur les processus de Lévy. On a étudié une approche de ces problèmes inverses par régularisation de Tikhonov. Cette approche permet de reconstruire de façon stable les paramètres d'un modèle markovien avec sauts à partir de l'observation d'un nombre fini d'options.

Le chapitre 4 pose les bases théoriques de cette approche et propose une paramétrisation des mesures de Lévy par la racine carrée de la densité, ce qui permet de ramener le problème dans un cadre hilbertien. La régularisation de Tikhonov proposée consiste à minimiser l'écart quadratique par rapport aux prix observés plus une norme hilbertienne des paramètres. Des résultats d'existence, de stabilité et de convergence de la solution du problème régularisé sont alors obtenus sous de hypothèses assez générales; des hypothèses supplémentaires (conditions de source) permettent d'obtenir une estimation de la vitesse de convergence. Le choix du paramètre de régularisation, sujet délicat, fait l'objet d'une discussion détaillée.

Le chapitre 5 propose un algorithme numérique pour le calcul de la solution du problème régularisé et l'étude du performance de cet algorithme dans différents modèles avec sauts. L'algorithme est basé sur l'emploi d'un algorithme de gradient pour la minimisation de la fonctionnelle régularisée : le gradient est calculé en résolvant une équation intégrôdifférentielle avec terme source (équation adjointe). Ce travail généralise ceux de Lagnado&Osher, Crépey et Egger & Engl au cas des équations intégrôdifférentielles. Les tests numériques montrent que cet algorithme permet de construire de façon stable un processus de Lévy calibré à un ensemble de

prix d'options.

**Mots clés :** Équations aux dérivées partielles paraboliques et intégrals, estimation des paramètres, problème inverse et calibration de modèle, modèles stochastiques en finance, Processus de Lévy, Processus de diffusion, Homogénéisation d'EDP, optimisation.







# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Rama Cont pour m'avoir accueilli au CMAP et me proposer un sujet de thèse, pour sa patience et ses qualités humaines exceptionnelles.

Ma plus grande reconnaissance revient à l'équipe "Aléatoire, finance et statistique", dirigée par Nicole El Karoui et formée de Nizar Touzi, Jocelyne Bion Nadal, Caroline Hillaret, Rama Cont et Valdo Durrleman ainsi à tout les chercheurs qui sont passés par ce groupe.

Je remercie mes rapporteurs, Jean Pierre Fouque et Marco Avellaneda, leurs remarques m'ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit.

Je remercie Olivier Pironneau, Régis Monneau, Olivier Pantz et Nicole El Karoui pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de mon jury de Thèse.

Je remercie Halim Doss, Agnès Sulem, Nizar Touzi, Patrick Le Tallec et Pierre Louis Lions professeurs enseignants aux master "Équations aux Dérivées Partielles et Applications" à l'Université Paris Dauphine qui m'ont motivé à ce domaine d'application des EDP.

Je remercie Monique Jeanblanc, Stéphane Crépy, Philippe Priaulet mes collègues à l'Université d'Evry, où j'avais passé deux années d'ATER, pour leurs aides et confiances ainsi Eric Taffin et Nassim Fintz qui m'ont donné l'occasion d'enseigner à l'EISTI.

Je remercie le gouvernement tunisien qui m'a attribué une bourse master-doctorat qui m'a trop aidé pendant mes études.

Je remercie les thésards et les chercheurs du CMAP, qui font de ce laboratoire un environnement propice à la réflexion scientifique. Je remercie en particulier l'ancien directeur Vincent Giovangigli ainsi notre nouveau directeur Kamal Hamdache pour leurs aide . Je remercie Jeanne Bailleul, Nasséra Nacer secrétaires du laboratoire pour tout leurs aides ainsi notre brillant ingénieur système Sylvain.

Je remercie ma famille, ma mère Chadlia, mon père Radwan sans eux j'aurai jamais arrivé à terminer ce travail, ainsi ma soeur Najah, mes frères Nouredine, Mehdi, Safouane, Mondher et toute ma grande famille et en particulier mon cher oncle Abdelhamid.

Enfin, merci Samiha !



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>10</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>12</b>
1.1 Motivation . . . . .	12
1.2 Modèle de Black-Scholes et volatilité implicite . . . . .	13
1.3 Calibration de modèle et relation avec les EDP . . . . .	15
1.4 Travaux effectués dans le cadre de cette thèse . . . . .	18
1.4.1 Sensibilité des prix d'options aux erreurs d'estimation dans la volatilité . . . . .	18
1.4.2 Modèles de diffusion avec sauts : problèmes inverses et régularisation	19
1.4.3 Un nouvel algorithme de calibration pour les modèles de dif- fusion avec sauts . . . . .	22
<b>I Calibration de modèles de diffusion</b>	<b>24</b>
<b>2 Homogénéisation d'une équation parabolique et application à l'équation de Dupire</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Modèle de diffusion . . . . .	27
2.2.1 Équation de Dupire . . . . .	28
2.2.2 Calibration sur des données bruitées et incomplètes . . . . .	29
2.2.3 Changement de variable . . . . .	30
2.3 Homogénéisation d'une équation parabolique : estimation de vitesse de convergence . . . . .	31
2.3.1 Convergence de champs aléatoires . . . . .	32
2.3.2 Vitesse de convergence de la solution . . . . .	33
2.4 Application à la formule de Dupire . . . . .	40
2.4.1 Convergence de la volatilité de Dupire : . . . . .	40
2.4.2 Localisation du système . . . . .	41
2.4.3 Estimation de la volatilité par interpolation linéaire à partir de la formule de Dupire . . . . .	41

2.4.4	Impact de l'estimation de la volatilité sur les prix des options	43
2.4.5	Estimation de l'erreur sur les options barrières . . . . .	45
2.5	Conclusion . . . . .	46

## **II Estimation des paramètres d'actifs financiers à sauts par une méthode numérique 48**

<b>3</b>	<b>Modèles à sauts en finance</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Modèle exponentielle Lévy : équations Backward et Forward . . . . .	49
3.2.1	Processus de Lévy : Définitions et Propriétés . . . . .	50
3.2.2	Modèles Exponentiels de Lévy : Définition et Exemples . . . . .	52
3.2.3	Exemples de processus de Lévy . . . . .	52
3.2.4	Évaluation d'options pour les modèles exponentielle Lévy . . . . .	55
3.2.5	Équation Forward . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Problème inverse et régularisation de Tikhonov</b>	<b>64</b>
4.1	Formulation du problème . . . . .	65
4.1.1	Espaces de mesures . . . . .	65
4.1.2	Un problème inverse mal posé . . . . .	67
4.2	Régularité du prix $u$ par rapport aux paramètres . . . . .	71
4.3	Régularisation de Tikhonov . . . . .	76
4.3.1	Construction de la fonctionnelle régularisée . . . . .	77
4.3.2	Existence, unicité et stabilité de la solution . . . . .	78
4.3.3	Comportement asymptotique de la solution . . . . .	79
4.3.4	Choix du paramètre de régularisation : Principe de Morozov . . . . .	83
4.3.5	Discussion . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Calcul du gradient et Tests numériques</b>	<b>88</b>
5.1	Calcul du gradient de $J$ . . . . .	89
5.1.1	Calcul de la variation de $u$ . . . . .	90
5.1.2	Calcul des variations de la fonction de Tikhonov . . . . .	91
5.1.3	Gradient sous forme intégrale . . . . .	92
5.2	Résultats numériques de calibration . . . . .	95
5.2.1	Méthode de différences finies pour la résolution des EDPI de $u$ et $P$ . . . . .	96
5.2.2	Schéma implicite-explicite aux différences finies . . . . .	97
5.2.3	Calcul numérique du gradient . . . . .	101
5.3	Tests numériques de l'algorithme de calibration . . . . .	105
5.3.1	Tests sur des observations simulées . . . . .	105
5.3.2	Test sur des données du marché . . . . .	106
5.4	Discussion . . . . .	112

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Motivation

La question la plus étudiée en finance mathématique est celle *d'évaluation* des actifs contingents : la théorie des options. Alors que la finance mathématique s'est principalement focalisée sur le problème de l'évaluation et de la couverture des produits dérivés au sein d'un modèle stochastique dont les caractéristiques sont supposées connues (*problème direct*), l'utilisation pratique de ces modèles implique une première étape d'identification, qui est le *problème inverse* associé. L'estimation statistique des paramètres à partir de données historiques sur les sous-jacents se révèle insuffisante pour plusieurs raisons. D'abord elle suppose une stationnarité des processus en jeu qui est souvent mise en défaut. Par ailleurs l'évaluation des produits dérivés nécessite la connaissance de la dynamique risque-neutre des sous-jacents, alors que les séries temporelles ne nous renseignent que sur leur dynamique historique. L'apparition de marchés liquides d'options a fourni une nouvelle source de données qui nous renseigne directement sur la dynamique risque-neutre des sous-jacents : les prix d'options *vanille*, c'est-à-dire Call et Put européens. Il paraît donc naturel d'incorporer ces prix d'options vanille dans la procédure de choix de modèle.

En fait, les prix d'options liquides ne sont pas seulement une source d'information, mais autant de contraintes sur le modèle. Un modèle qui ne reproduirait pas les prix de marché de ces options conduirait à des prix incohérents par rapport au marché ; il serait alors possible d'effectuer des arbitrages par rapport aux prix générés par le modèle à l'aide d'instruments liquides. Cette contrainte correspond à la pratique du *mark to market* : les paramètres du modèle sont *calibrés* pour reproduire les prix de marché des options liquides et on utilise ensuite le modèle pour évaluer et couvrir les options exotiques ou illiquides.

La pratique des marchés, à partir des travaux de Black, Scholes et Merton [11] a imposé une vision implicite de la réalité qui est encore mal comprise par certains travaux de chercheurs en finance mathématique. Les opérateurs calibrent chaque jour

les paramètres de leurs modèles sur les prix de marché : le modèle dans lequel les produits optionnels sont évalués change donc chaque jour. Cette situation n'engendre en fait pas de difficultés particulières, pour la plupart des produits traités, et dans des conditions normales, en raison d'une certaine robustesse des modèles utilisés [36]. Mais les limites de cette pratique sont encore très mal évaluées et ne sont la plupart du temps pas prises en compte dans la modélisation financière. Or, le besoin croissant, de la part des banques ainsi que des autorités de régulation, de quantifier précisément les risques associés aux produits dérivés font de la compréhension de cette question un sujet de toute première importance. Il donne naissance, d'un point de vue mathématique, à des questions originales et difficiles d'étude de solutions d'E.D.P, E.D.P.I linéaires, et se situe de ce fait idéalement au carrefour de la pratique des marchés financiers et de l'état de la recherche fondamentale.

Dans cette thèse nous nous sommes attachés à explorer quelques unes de ces questions au sein de deux familles de modèles stochastiques : les modèles de diffusion et les modèles à sauts basés sur les processus de Lévy. Nous avons étudié dans ces modèles la relation entre les prix d'options et les coefficients –fonctionnels– du modèle puis d'exploiter ces relations pour proposer de nouvelles méthodes de calibration.

## 1.2 Modèle de Black-Scholes et volatilité implicite

Le modèle le plus simple qui décrit l'évolution d'une action sur le marché et peut être utilisé pour l'évaluation ou la couverture des produits est celui de Black&Scholes, donné par l'équation différentielle stochastique suivante sous la probabilité risk-neutre :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t \\ S_{t_0} = S \end{cases} \quad (1.1)$$

-  $S_t$  est le cours du sous-jacent.

-  $W_t$  est un mouvement Brownien standard.

-  $r$  le taux d'intérêt,  $q$  le taux de dividende.

-  $\sigma$  une constante positive ; qui représente la volatilité du rendement.

Le prix d'une option call Européenne de maturité  $T$ , de pay-off  $h$  et dont le sous-jacent suit le modèle de Black&Scholes est donné par l'espérance risque-neutre actualisée de son flux terminal :

$$C^{BS}(S, t_0) = e^{-(r-q)(T-t_0)} E[h(S_T)/S_{t_0} = S]$$

qui est solution d'une équation aux dérivées partielles parabolique de *Kolmogorov*, dite équation de Black&Scholes :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC(t, S) \\ C(T, S) = h(S) \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour une option d'achat  $h(x) = (x - K)_+$ , pour une option de vente  $h(x) = (K - x)_+$  où  $K$  est le prix d'exercice de l'option.

Dans ces deux cas particuliers, les prix sont donnés par des formules explicites. Par exemple dans le cas du call (option d'achat) et pour  $q = 0$ , on a :

$$C^{BS}(t, S, T, K, \sigma) = SN(d_1(S, t)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(S, T)) \quad (1.3)$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

et  $N(\cdot)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donnée par :  $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ .

Cette formule est strictement croissante en  $\sigma$  :  $\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} > 0$  et définit une bijection entre prix d'options call et volatilité. En inversant cette bijection, on peut associer à un prix de call observé  $C^*(T, K)$  une "volatilité implicite"  $\Sigma(T, K)$  définie par :

$$\exists! \Sigma(T, K) > 0, C^*(T, K) = C^{BS}(t, S, T, K, \Sigma(T, K))$$

Un test de l'hypothèse de Black Scholes consiste à calculer la volatilité implicite et d'examiner si elle est constante. En réalité, cette surface de volatilité implicite n'est pas plate : la volatilité implicite varie avec la maturité et le prix d'exercice de l'option. C'est le phénomène de *smile* de volatilité dont nous voyons un exemple sur la figure 2.1. Le smile de volatilité montre que le modèle de Black Scholes est insuffisant pour reproduire les données de marché : l'étude du problème de calibration n'est donc faisable que dans un cadre plus général que Black Scholes. Différentes méthodes ont été proposées pour généraliser le modèle de Black & Scholes :

1. Modéliser la volatilité  $\sigma$  comme une fonction déterministe  $\sigma(t, S_t)$  de  $S_t$  et  $t$  : c'est la classe des modèles à volatilité locale introduite par Dupire [34].
2. Ajouter à l'évolution de  $S$  des termes de saut. Cette classe de modèles, de plus en plus populaires, permet à la fois de reproduire des smiles de volatilité et de prendre en compte le risque d'une grande variation de prix dans les marchés [23]. Nous aborderons cette classe de modèles dans le chapitre 3.
3. Modéliser la volatilité elle même comme un processus stochastique  $(\sigma_t)$  : c'est l'approche des modèles à volatilité stochastique [41], qui n'est pas abordée



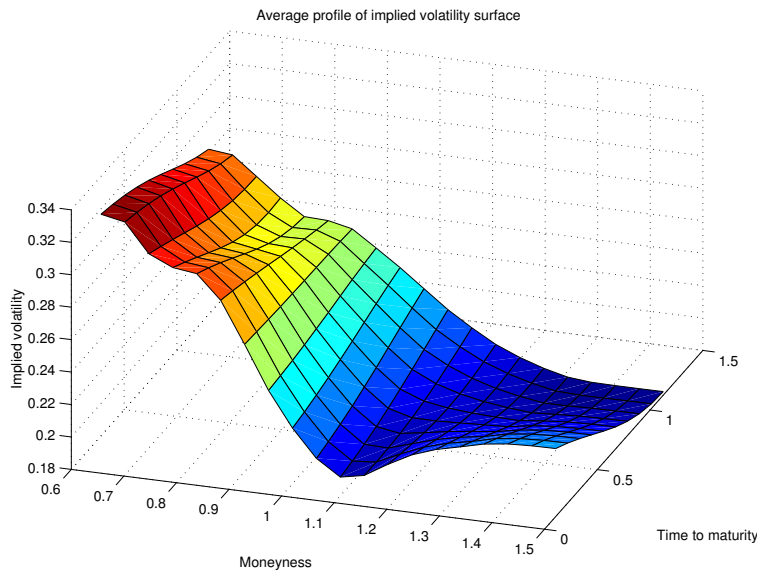


FIG. 1.1 – Surface de volatilité implicite pour options sur SP500.

dans cette thèse. Bien que les dynamiques engendrées dans cette classe soient plus variées et plus réalistes que celles engendrées par les modèles à volatilité locale [34], en ce qui concerne la calibration des volatilités implicites des calls et des puts cette classe de modèle ne permet pas de calibrer une classe plus large de surfaces de volatilité. En effet, on peut montrer que les prix d'options dans un modèle à volatilité stochastique sont identiques à ceux d'un modèle de diffusion (volatilité locale) avec une fonction de volatilité locale  $\sigma_{\text{eff}}(.,.)$  égale à :

$$\sigma_{\text{eff}}(t, S)^2 = E[\sigma_t^2 | S_t = S]$$

Nous étudions dans ce travail la question de la relation entre coefficients du modèle et prix d'options dans les deux premiers cas. Pour les modèles à volatilité stochastiques, nous renvoyons le lecteur à [41].

### 1.3 Calibration de modèle et relation avec les EDP

Dans un modèle sans arbitrage, le prix d'une option est représentable comme une espérance conditionnelle du pay-off par rapport à l'information disponible à l'instant de l'évaluation [13]. Cette espérance conditionnelle peut être calculée soit par des méthodes probabilistes (méthode de Monte de Carlo...), soit par des méthodes analytiques. En effet, dans les modèles Markoviens le prix d'une option est solution d'une équation aux dérivées partielles qui peut être parabolique, intégral où inéquation variationnelle.

Par exemple dans un modèle de diffusion où la dynamique risque-neutre du sous-jacent est décrite par la diffusion

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

où  $W_t$  est un mouvement Brownien standard, le prix d'une option Européenne s'écrit comme solution d'une EDP parabolique sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}P = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma(S, t)^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \\ P(S, T) = \psi(S), \end{cases}$$

qu'il est possible de résoudre avec des méthodes numériques stables.

Le problème de calibration de modèle est le problème inverse associé à ces EDPs : il s'agit d'obtenir une estimation d'un ou plusieurs coefficients de l'EDP à partir d'une observation souvent partielle de sa solution. Etant donnés des prix de marché d'options liquides  $C_{t_0}^*(K_i, T_i)$  à  $t = t_0$ , correspondant à des strikes  $K_i$  et maturités  $T_i$ , il s'agit de trouver les paramètres du modèle  $\theta$  tels que

$$C^\theta(t_0, S_0; K_i, T_i) = C_{t_0}^*(K_i, T_i)$$

où  $S_0$  est le cours du sous-jacent, et  $\{C^\theta(T_i, K_i)\}$  sont les prix des options dans le modèle. La nature de  $\theta$  dépend du type de modèle considéré et de sa paramétrisation.

On se concentrera dans la suite sur les exemples suivants :

- Le modèle de Black-Scholes ;  $\theta \in (0, +\infty)$  est le paramètre de volatilité (constante).  
Le problème de calibration correspond simplement au calcul de la volatilité implicite
- Le modèle de diffusion markovienne : ici le paramètre  $\theta$  est la fonction  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , appelée *surface de volatilité locale*.
- Le modèle exponentielle-Lévy : la dynamique risque-neutre du sous-jacent est donnée par

$$S_t = \exp \{rt + X_t\}$$

où  $X_t$  est un processus de Lévy paramétré par une constante  $\sigma$  positive et une mesure  $\nu$  qui vérifie

$$\int_R \nu(dy) \min(1, |y^2|) dy < \infty$$

- Le modèle sans arbitrage le plus général peut être spécifié en se donnant une mesure risque-neutre  $Q$ , telle que

$$B(t_0, T_i) E^Q((S_{T_i} - K_i)_+ | S_{t_0} = S_0) = C_{t_0}^*(K_i, T_i)$$

où  $B$  est le facteur d'actualisation. Ici  $\theta = Q$  : il s'agit de retrouver les probabilités risque neutres à partir des observations des prix d'options.

La calibration de fonctions de volatilité locale a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années [1, 6, 14, 16, 22, 8, 29] et différentes méthodes ont été proposées :

- Formule de Dupire : La méthode la plus connue est la formule de *Dupire* : cette méthode nécessite l'observation des prix d'options call pour toute maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$ . A partir de l'équation de *Dupire*

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial T} + (r - q)K \frac{\partial C}{\partial K} - \frac{\sigma^2(T, K)}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = rC(T, K) \\ C(t_0, K) = h(K) \end{cases} \quad (1.4)$$

et si la fonction  $C(T, K)$  est connue et suffisamment régulière de telle façon que les dérivées dans (1.4) aient un sens, alors on peut extraire l'expression de la volatilité locale

$$\sigma(T, K) = \sqrt{\frac{2(C_T + rKC_K)}{K^2 C_{KK}}} \quad (1.5)$$

qui soit compatible avec les données du marché. Les prix ne sont pas donnés d'une manière continue et comportant une incertitude due à la fourchette vente-achat, cette formule doit en fait être approximé et/ou précédée d'interpolation ou lissage des données.

- Formulation comme problème d'optimisation : l'idée des méthodes de régularisation est d'ajouter une fonction en  $\sigma$  qui soit convexe à la différence quadratique entre les prix calculés avec le modèle et les prix observés, soit :

$$J(\sigma) = J_\alpha(\sigma) + \sum_{i \in \mathcal{I}} |C(T_i, K_i; \sigma) - C_M(T_i, x_i)|^2 \quad (1.6)$$

plusieurs choix de fonction de régularisation ont été utilisés. Dans [29], l'auteur fait la régularisation de Tikhonov, c'est à dire prendre  $J_\alpha = \alpha \|\sigma - \bar{\sigma}\|_H^2$  pour une valeur de référence  $\bar{\sigma}$  dans un espace de Hilbert  $H$ , dans [1] et [14] ils utilisent la même fonction de régularisation mais déterminent l'estimation de  $\sigma$  avec une autre méthode à base d'EDP. Dans [48] la fonction de régularisation est prise sous la forme  $J_\alpha(\sigma) = \alpha \|\nabla \sigma\|_{H_1}^2$ , pour plus de méthode de régularisation voir [15] [6] [16]. Le but de ces méthodes de régularisation est d'avoir une estimation stable en fonction des observations de la volatilité locale  $\sigma(., .)$ . Une question peu étudiée dans ces travaux est la convergence des estimateurs lorsque le bruit d'observation  $\delta$  est faible.

- Méthode de controle stochastique [6]
- Méthodes basées sur des développements asymptotiques : Bouchouev et al [16] utilisant des méthodes basées sur le développement en parametrix, Fouque et al. [41] utilisent des méthodes d'homogénéisation dans le cadre des modèles à volatilité stochastique.

La calibration des modèles à sauts est moins étudiée : on peut citer des méthodes spectrales [7] et des méthodes de régularisation avec entropie relative [24, 25] que nous décrivons plus en détail ci-dessous.

## 1.4 Travaux effectués dans le cadre de cette thèse

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse se découpent en trois parties :

- Homogénéisation d’une équation parabolique et application : étude de la sensibilité des prix d’options aux erreurs d’estimation dans la volatilité.
- Etude des prix d’options dans les modèles markoviens avec sauts : équation forward et problème inverse associé.
- Un nouvel algorithme de calibration pour les modèles exponentielle-Lévy.

### 1.4.1 Sensibilité des prix d’options aux erreurs d’estimation dans la volatilité

Dans la première partie de cette thèse, qui est consacrée à la calibration des modèles continus et plus particulièrement modèle général de Black-Scholes dont la dynamique risque neutre est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_{t_0} = S \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans ce cas, la calibration consiste à donner une estimation  $\sigma^{\delta, \mathcal{I}}(., .)$  de la fonction de volatilité  $\sigma(., .)$  à partir d’un nombre fini d’observations  $\{C^\delta(T_i, K_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  sur le marché d’options connus avec une précision  $\delta$ .

Supposons que nous avons un estimateur  $\sigma^\delta(T, x)$  de la fonction volatilité locale obtenu par l’une des méthodes ci-dessus qu’on suppose convergent vers une fonction de volatilité  $\sigma(., .)$  lorsque le niveau de bruit  $\delta \rightarrow 0$ . Nous souhaitons étudier l’impact de l’erreur estimation de la volatilité sur les prix d’options européenne et à barrière.

Sur le plan mathématique il s’agit d’estimer une vitesse de convergence dans un problème d’homogénéisation d’une EDP parabolique à coefficients aléatoires. Les estimations de vitesse de convergence dans les problèmes d’homogénéisation d’EDP à coefficients aléatoires ont été étudiées dans des nombreux cas [55] mais dans le contexte des limites de type “viscosité évanescence” où la limite est souvent une EDP d’ordre différent (inférieur). Ici, ce n’est pas le cas : les équations sont de même ordre.

Nous avons d’abord montré un tel résultat pour une EDP parabolique générale (Proposition 2.3.2.1). Notre résultat, un peu surprenant à première vue, est que l’erreur induite sur les prix d’options européennes est proportionnelle à l’erreur d’estimation sur *l’inverse*  $1/\sigma(t, x)$  de la volatilité c’est à dire

$$\frac{1}{\hat{\sigma}(t, x)^2} - \frac{1}{\sigma(t, x)^2}$$

calculée au point  $(t, x)$  correspondant aux caractéristiques de l’option. Les conditions de ce théorème sont faciles à vérifier pour les méthodes usuelles de “calibration” de la surface de volatilité locale.

Nous appliquons ensuite ce résultat à une méthode répandue de reconstruction de la volatilité locale, en utilisant la formule de Dupire [34]. On commence par donner une condition suffisante sur les observations pour que la volatilité estimée à partir d'une approximation aux différences finies de la formule de Dupire converge vers la volatilité locale (Proposition 2.4.3.1). Dans ce cas nous montrons le résultat suivant : dans le cas où les paramètres d'échantillonnage des données (grille des observations en strike et maturité) vérifie asymptotiquement la relation suivante

$$\Delta x = (2\delta)^{1/3} \quad \text{et} \quad \Delta T = \delta^{1/2} \quad (1.8)$$

avec le bruit d'observation  $\delta$  alors la volatilité de Dupire converge vers l'inverse de la fonction de volatilité locale  $\sigma(.,.)$ .

Ce résultat montre que la vitesse optimale de convergence est obtenue lorsque une relation est vérifiée entre la taille de la grille des observations sur les options et la fourchette bid-ask  $\delta$ . En particulier, il n'est pas optimal d'utiliser des strikes / maturités trop rapprochés en présence de fourchette bid-ask.

Ensuite, nous avons pu donner dans ce cas des estimations d'erreur sur les options barrières et les options européennes calculés avec la volatilité de Dupire. Ces estimations confirment l'intuition que l'erreur sur les prix d'options est loin d'être homogène en strike/sous-jacent et sa structure 'spatiale' reflète la structure des erreurs d'estimation dans l'inverse de la volatilité au carré.

### 1.4.2 Modèles de diffusion avec sauts : problèmes inverses et régularisation

Dans la deuxième partie de ce travail, on étudie une autre extension du modèle de Black-Scholes en ajoutant dans la dynamique du sous-jacent  $S_t$  un terme de *saut*; la dynamique de  $S_t$  est donnée alors par

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r - q)dt + \sigma(t, S_{t-})dW_t + \int (e^z - 1)\tilde{J}_X(dtdz) \quad (1.9)$$

où  $\sigma(.,.)$  est une fonction déterministe en  $t$  et  $S_t$ ,  $\tilde{J}$  est la mesure de Poisson compensée de  $X$ .

La calibration dans ce cas consiste à donner une estimation de la surface de volatilité locale  $\sigma(.,.)$  et de l'intensité des sauts caractérisée par la mesure de Lévy  $\nu$  de  $\tilde{J}$ , compatible avec les observations du marché; ie :

$$e^{-r(T_i-t)} E^Q[(S_{T_i} - K_i)_+ / S_t = S] = C_M(t, S; T_i, K_i) \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (1.10)$$

Dans ce travail on s'intéresse au cas particulier des modèles de type (3.17) à coefficients constants : c'est le cas où la dynamique risque neutre est donnée par l'exponentielle d'un processus de Lévy, caractérisé par un triplet  $(\gamma, \sigma, \nu)$ . La calibration

dans ce cas consiste à donner une estimation de  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , le triplet caractéristique du processus de Lévy  $X_t$  qui va être réduit au couple  $(\sigma, \nu)$ .

Alors que la calibration des modèles de diffusion a fait l'objet de nombreuses études [1, 6, 14, 16, 22, 8, 29], la calibration des modèles à sauts est moins étudiée. On peut citer les travaux récents suivants sur la calibration des modèles à sauts :

- Cont & Tankov [24] donnent une méthode non paramétrique stable pour la calibration du modèle exponentiel de Lévy. Ils utilisent une méthode de régularisation pour le problème de calibration en pénalisant l'écart quadratique des prix d'options par l'entropie relative. Après régularisation, leur méthode donne un algorithme stable en fonction des observations. Cette méthode fixe la volatilité  $\sigma$  et calibre seulement les sauts du modèle via la mesure de Lévy. Dans [25] ils étudient la convergence de cet estimateur dans la limite (classique dans les problèmes mal-posés, voir [39]) de faible bruit d'observation mais toujours pour un nombre fini de données.
- Belomestny & Reiss [7] donnent une méthode de régularisation spectrale pour l'estimation des paramètres d'un processus de Lévy à partir de prix d'options et examinent la convergence des estimateurs mais dans une asymptotique (limite de bruit blanc en strike) qui est différente de celle, standard dans les problèmes inverses mal posés, étudiée dans [25].

Nous proposons dans cette thèse une approche analytique, fondée sur l'utilisation d'équations integrodifférentielles, pour la calibration d'un ensemble de prix d'options  $\{C_M(T_i, K_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  dans un modèle exponentielle-Lévy et, plus généralement, des modèles de diffusion avec sauts. Dans [27] on montre que la valeur d'une option call européenne pour une maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$  fixes est solution d'une équation intégral-différentielle. Dans le chapitre 3, on utilise la formule d'Itô pour les processus à sauts pour écrire une équation de même type que celle utilisée dans l'évaluation, mais qui donne le prix d'options pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercices  $K$  : cette équation 'forward' est analogue à l'équation de Dupire, mais pour les modèles à sauts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial T} = -(r - q)K \frac{\partial C}{\partial K} - qC(T, K) + \frac{\sigma^2}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \\ \quad + \int \nu(dy) e^y \{C(T, K e^{-y}) - C(T, K) + K(1 - e^{-y}) \frac{\partial C}{\partial K}\} \\ C(t_0, K) = (S_{t_0} - K)_+ \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Alors les observations du marché sont solutions de cette équation et le problème de calibration devient comme dans le cas de diffusion, estimation des coefficients de cette équation intégral-différentielle ( ces paramètres sont un coefficient de diffusion  $\sigma$  et la mesure de Lévy  $\nu$ ).

Le chapitre 3 présente les modèles à sauts et plus particulièrement le modèle

exponentielle Lévy. On donne des exemples des processus de Lévy, les différentes méthodes d'évaluation d'options dont les sous-jacents suivent des modèles à sauts (par tranformation de Fourier et par résolution d'équation intégrô-différentielle). Le principal résultat de ce chapitre est d'établir rigoureusement une équation de type *forward* similaire à l'équation de Dupire pour les options call dans un modèle Markovien avec sauts.

Dans le chapitre 4, nous étudions le problème inverse associé à (1.11). Nous montrons des résultats de densité pour restreindre notre domaine de recherche sur un convexe Hilbertien  $\bar{\mathcal{D}}_1$  constitué par l'ensemble de processus de Lévy de volatilité  $\sigma > 0$  et dont la mesure de sauts  $\nu(dy) = h^2(y)dy$  a une densité dans un espace  $L^2$  avec poids. On utilise la régularisation de Tikhonov, comme dans [29] pour le cas de diffusion. On définit pour un paramètre de référence  $(\bar{\sigma}, \bar{h}) \in \mathcal{D}_1$  et un coefficient de régularisation  $\alpha$ , la fonction de Tikhonov

$$J_\alpha(\sigma, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |C(T_i, K_i; \sigma, h) - C_M(T_i, K_i)|^2 + \alpha \|(\sigma - \bar{\sigma}, h - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \quad (1.12)$$

Le but de la régularisation de Tikhonov est de minimiser  $J_\alpha$  pour donner une approximation de la solution de (1.10) la plus proche du point de référence.

Nous montrons d'abord que, pour tout  $\alpha > 0$  le problème de minimisation a une solution et nous démontrons la stabilité de la solution

$$(\sigma_\alpha, h_\alpha) = \inf_{(\sigma, h) \in \mathcal{D}_1} J(\sigma, h) \quad (1.13)$$

par rapport aux données du marché  $\{C_M(T_i, K_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ . Ensuite, nous donnons des conditions suffisantes sur le choix du paramètre de régularisation  $\alpha$  pour que cette solution converge vers celle de (1.10) dans le cas asymptotique  $\delta \rightarrow 0$  : si  $\alpha(\delta)$  est telle que :

$$\alpha(\delta) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \longrightarrow 0$$

alors

$$(\sigma_{\alpha(\delta)}^\delta, h_{\alpha(\delta)}^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} (\sigma^*, h^*)$$

Nous étudions ensuite quelques propriétés de la fonctionnelle  $(\sigma, h) \longrightarrow C(T, K; \sigma, h)$  (continuité, dérivabilité au sens de Fréchet) ce qui nous permettra d'appliquer certains résultats de la théorie des problèmes inverses [39] et obtenir l'estimation suivante pour la vitesse de convergence de  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  vers  $(\sigma^*, h^*)$  (Proposition 4.3.3.1) :

$$|\sigma_\alpha^\delta - \sigma^*| + \|h_\alpha^\delta - h^*\| \leq \frac{\delta + \alpha w}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - Lw}} \quad (1.14)$$

et l'impact de cette erreur sur les prix d'options

$$|C(T_i, K_i; \sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - C^\delta(T_i, K_i)| \leq \delta + 2\alpha w \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (1.15)$$

Nous avons également étudié le problème du choix du coefficient de régularisation. Nous montrons qu'il existe un tel paramètre qui satisfait au principe de *Morozov* [59]

$$\exists \alpha > 0 \text{ telle que } \delta \leq |C(T_i, K_i; \sigma_\alpha^\delta) - C^\delta(T_i, K_i)| \leq c\delta \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (1.16)$$

Lorsque ce coefficient de régularisation qui satisfait à l'inégalité (1.16), on obtient des vitesses de convergence des paramètres lorsque le niveau du bruit d'observation  $\delta$  tend vers 0 :

$$|\sigma_\alpha^\delta - \sigma^*| + \|h_\alpha^\delta - h^*\| \leq c_1 \sqrt{\delta} \quad (1.17)$$

### 1.4.3 Un nouvel algorithme de calibration pour les modèles de diffusion avec sauts

Dans la dernière partie de ce travail, nous proposons une méthode numérique de calibration basée sur la régularisation de Tikhonov étudiée dans le chapitre 4, dont l'implémentation exploite l'équation forward étudiée dans le chapitre 3. Il s'agit de reconstruire de façon nonparamétrique un processus de Lévy à partir de la minimisation de la fonctionnelle régularisée  $J_\alpha$  étudiée dans le chapitre (4).

Le calcul de la fonctionnelle se fait en résolvant une équation intégro-différentielle de type forward, semblable à l'équation de Dupire, qui évalue à un instant fixe  $t_0$  les options européenne de toute maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$ . Pour la minimisation de  $J_\alpha$ , nous avons utilisé une méthode de descente du gradient. La difficulté principale est dans le calcul du gradient (dérivées directionnelles) de la fonctionnelle : nous avons proposé de résoudre cette difficulté en écrivant le gradient de  $J_\alpha$  sous une forme intégrale qui contient uniquement la fonction prix  $u$  et la fonction d'état adjoint  $P$ , elle même solution d'une équation integrodifférentielle forward avec terme source. Notre algorithme de calibration consiste à résoudre ces deux équations intégro-différentielles et calculer deux intégrales par itération. La figure 1.4.3 donne un exemple de reconstitution de smile de volatilité à 6 mois avec notre algorithme, à partir de 10 observations de prix.

Cet algorithme peut être généralisé à une classe plus large de modèles comme celle des modèles à volatilité locale avec sauts (3.17) comme ceux étudiés par Andersen & Andreasen [4], combinant par exemple notre algorithme avec celui étudié par Crépey dans [30].



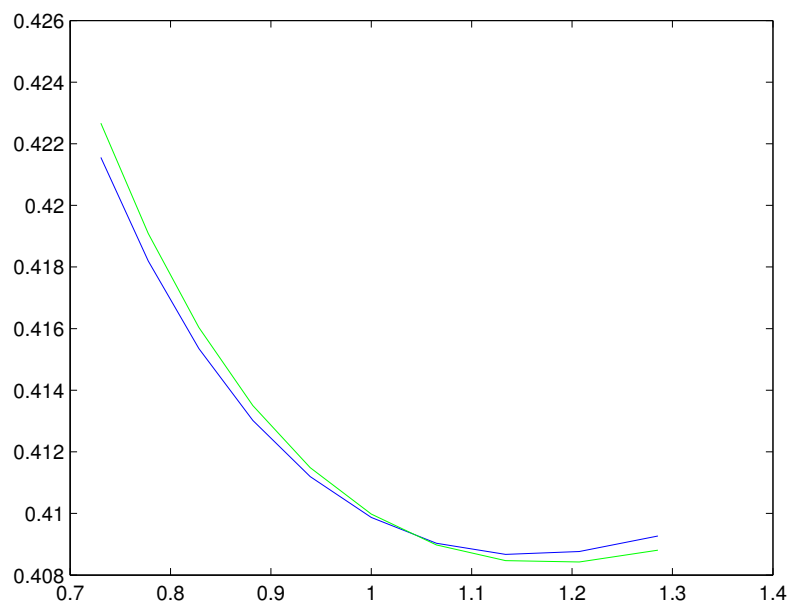


FIG. 1.2 – Reconstruction d'un smile de volatilité implicite avec un modèle exponentielle-Lévy avec l'algorithme décrit dans le Chapitre 5.

Première partie

Calibration de modèles de  
diffusion

# Chapitre 2

## Homogénéisation d'une équation parabolique et application à l'équation de Dupire

Dans ce chapitre nous étudions un problème d'estimation de vitesse de convergence dans l'homogénéisation d'une équation parabolique qui fait intervenir un passage à la limite dans le coefficient de diffusion. Nous appliquons le résultat à l'étude de la stabilité des prix d'options par rapport aux erreurs d'estimation de volatilité dans un modèle de diffusion.

### 2.1 Introduction

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans un cadre où la dynamique d'un actif sous-jacent est donnée par une diffusion :

$$dS_t = S_t \mu_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t$$

paramétrisée par une fonction de volatilité locale  $\sigma : [0, T] \times ]0, \infty[ \mapsto ]0, \sigma_{\max}[$ , la valeur  $C(T, K)$  d'une option call européenne de maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$  vérifie l'équation de Dupire [34] :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma^2(T, K)}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K} & \forall (T, K) \in ]0, T_{\max}] \times R_+^* \\ C(0, K) = (S - K)_+ & \forall K \in R_+^* \end{cases}$$

Cette équation permet en théorie de retrouver la volatilité locale  $\sigma(., .)$  à partir d'une nappe de prix d'options  $(T, K) \rightarrow C(T, K)$  observée pour un continuum de valeurs  $(T, K)$  : c'est la formule de Dupire, déjà mentionnée dans le chapitre 1 :

$$\sigma(T, K) = \sqrt{\frac{2(C_T + rKC_K)}{K^2 C_{KK}}} \quad (2.1)$$

Mais ces observations sont en fait données sous forme d'une paire de prix –prix de vente et prix d'achat– pour chaque option. Il est alors usuel de prendre la moyenne arithmétique des deux comme input de la procédure de calibration, mais ce choix est arbitraire et, intuitivement, d'autres choix dans la fourchette ne devraient pas conduire à des solutions très différentes.

De plus, en pratique, on dispose d'un nombre *fini* d'options  $[C^\delta(T_i, K_j)]_{i,j}$  pour différentes maturités  $T_i$  et prix d'exercice  $K_j$ . Il est fréquent dans ce cas d'avoir recours à une procédure de lissage ou d'interpolation de la surface de volatilité implicite, pour obtenir une nappe continue et régulière  $\hat{C}(T, K)$  à laquelle on appliquera par exemple la formule de Dupire ou une méthode de reconstruction paramétrique de la volatilité locale  $\sigma(., .)$ .

Pour ces raisons –non-unicité du prix, lissage ou interpolation– la nappe de prix  $\hat{C}(T, K)$  sur laquelle on base l'estimation de la volatilité n'est pas une observation 'exacte' mais bien une reconstruction. Donc, même dans le cas théorique où les prix d'options observées proviennent d'un modèle de diffusion, la nappe reconstituée  $\hat{C}(T, K)$  peut être différente de la nappe de prix théorique  $C(T, K)$  calculée à partir de ce modèle de diffusion. La différence entre le prix théorique  $C(T, K)$  et la nappe de prix  $\hat{C}(T, K)$  reconstituée par lissage/interpolation peut avoir une dépendance complexe en  $(T, K)$ , selon le nombre de prix observés en input, l'ampleur de la fourchette bid-ask (qui représente la différence entre le prix d'achat (bid) et le prix de vente (ask)) et la méthode de lissage utilisée.

Quelle que soit la méthode de reconstruction de la fonction de volatilité locale –lissage suivi de la formule de Dupire ou bien utilisation d'un algorithme d'optimisation [6, 29]– le résultat de la procédure de calibration ne sera pas *égale* à  $\sigma$  mais sera un estimateur  $\hat{\sigma}(., .)$  qui, dans le meilleur des cas, sera 'proche' de  $\sigma(., .)$ . Nous allons modéliser cette différence comme un bruit  $\varepsilon(., .)$  qui a une structure spatio-temporelle, c'est-à-dire un *champ aléatoire*, défini sur un espace de probabilité auxiliaire  $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  représentant “ l'erreur d'observation ” ou, plus précisément, l'erreur de reconstruction de la nappe des prix d'options :

$$\hat{\sigma}(t, S) = \sigma(t, S) + \varepsilon(t, S)$$

Nous allons noter  $\delta$  l'ampleur de ce bruit, qui peut être quantifiée par une norme appropriée ( $L_1$  ou  $L_2$  par exemple) du champ aléatoire  $\varepsilon(., .)$ . Notons génériquement  $\delta$  la norme de ce bruit.

L'estimateur  $\hat{\sigma}(., .)$  de fonction de volatilité locale est ensuite utilisée pour évaluer d'autres types d'options. Par exemple pour évaluer la valeur d'une option put à barrière, de prix d'exercice  $K$  et de barrière  $H$ , on résout :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + rS \frac{\partial \hat{P}}{\partial S} + \frac{(\hat{\sigma}(\dots)(t, S))^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial S^2} = r\hat{P}(t, S) & \text{sur } [0, T] \times ]0, H[ \\ \hat{P}(T, S) = (K - S)_+ & \hat{P}(T, H) = 0 \end{cases}$$

Cette solution dépend naturellement de l'estimateur  $\hat{\sigma}(., .)$  et l'erreur d'estimation sur  $\hat{\sigma}(., .)$  va influencer la précision de  $\hat{P}(t, S)$ . Dans ce chapitre nous analysons

l'influence de ces erreurs d'estimation de la volatilité locale sur la précision du calcul des prix d'options.

D'abord, nous étudions cette question dans un cas général : nous donnons des conditions sur un estimateur  $\hat{\sigma}(\cdot, \cdot)$ , modélisée comme une suite de champs aléatoires, sous lesquelles les prix  $\hat{P}(t, S)$  des options Européennes ou barrières calculés avec  $\hat{\sigma}$  convergent vers ceux calculés avec  $\sigma(\cdot, \cdot)$ . Sous ces hypothèses, nous montrerons une relation entre la vitesse de convergence locale de la solutions en fonction de  $(T, K)$  et la vitesse de convergence locale de  $\hat{\sigma}(\cdot, \cdot)$ .

Ces résultats généraux sont ensuite illustrés dans le cas des procédures courantes d'estimation de la volatilité locale, notamment la formule de Dupire. Une méthode consiste à utiliser des différences finies pour l'approximation des dérivées dans la formule de Dupire : nous montrons que dans ce cas, contrairement à une idée naïve, l'estimation optimale de la volatilité locale n'est pas obtenue en évaluant des différences finies sur la grille d'observations la plus fine possible mais que la grille doit être choisie en fonction de la fourchette bid-ask  $\delta$ . Sous cette condition nous montrons la convergence de la volatilité locale ainsi que la convergence des prix d'options calculées avec la volatilité estimée quand  $\delta \rightarrow 0$  ; nous donnons également la vitesse de convergence de ces quantités en fonction de l'incertitude  $\delta$  sur les observations du marché. Nous montrons enfin par des contre-exemples, sur des exemples des modèles de diffusion, que si cette condition n'est pas respectée l'estimateur de la volatilité locale n'est pas consistant.

## 2.2 Modèle de diffusion

La première et la plus simple généralisation du modèle du Black&Scholes est un modèle de diffusion, avec une volatilité déterministe non-constante qui dépende du temps et du cours de sous-jacent donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t \\ S_{t_0} = S \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $(\mu_t)_t$  est un processus positif, et  $\sigma$  est une fonction positive.

La valeur d'une option call européenne de maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$  est donnée par :

$$C(S, t; K, T) = e^{-r(T-t)} E^P[(S_T - K)_+ / S_t = S]$$

ou  $P$  est la probabilité risque-neutre sous laquelle l'évolution de l'actif est donné par  $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(S_t, t)dW_t$ .

Comme dans le cas de la volatilité constante, à partir de la formule d'Itô , on montre que le prix d'une option européenne de maturité  $T_i$  et de prix d'exercice  $K_j$ , dont

l'action sous-jacente suit le modèle de diffusion est solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2(t,S)}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC(t, S; T_i, K_j) \\ C(T_i, S; T_i, K_j) = (S - K_j)_+ \end{cases} \quad (2.3)$$

Cette équation admet une unique solution  $C(t, S, \sigma(.,.), T_i, K_j)$  pour toute  $\sigma \in \mathcal{M}_Q = \{\sigma; 0 < \sigma(x, t) \leq \lambda\}$  [40].

On peut résoudre ce type d'équations par des méthodes numériques classiques (éléments finis, différences finies) ou par des méthodes de simulation (Monte Carlo, quasi Monte Carlo) [32]. Dans la partie numérique de ce travail, on va utiliser la méthode des différences finies pour la résolution des EDP.

### 2.2.1 Équation de Dupire

L'usage de ces modèles de diffusion par les marchés d'options est en fait d'exploiter la relation entre prix et volatilité pour extraire une information implicite sur la volatilité à partir des prix du marché. On ne dispose pas en pratique des paramètres du modèle (dans ce cas : la fonction de volatilité) mais des prix d'options call  $C(T, K)$ .

La calibration des processus de diffusion consiste alors à identifier cette fonction de volatilité  $\sigma(T, K)$  à partir d'une observation partielle de la solution  $C(K, T)$ ; typiquement un nombre fini d'options. L'équation de Dupire pour les options call européennes [34], qui peut être interprétée comme le système adjoint de l'EDP généralisé de Black&Scholes (2.3) est donnée par :

$$\begin{cases} C_T = \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 C_{KK} - r K C_K \\ C(S_0, t_0; K, t_0) = (S_0 - K)_+ \end{cases} \quad (2.4)$$

En isolant le terme de volatilité, on peut déduire la formule de Dupire qui détermine la fonction de volatilité locale compatible avec les prix des calls donnés par :

$$\sigma^2(K, T) = 2 \frac{C_T + r K C_K}{K^2 C_{KK}} \quad (2.5)$$

La formule de Dupire a le mérite de démontrer que, dans le cas où nous observons un prix unique pour des calls/put pour un continuum de prix d'exercice et de maturités, il y a une unique fonction de volatilité locale qui est déterminée par ces prix. On remarque que l'expression de Dupire (2.5) est écrite sous forme des dérivées de prix des options qui sont très sensibles aux petites perturbations des prix observés, ce qui rend cette expression instable.

On peut aussi exprimer l'équation de Dupire dans le langage de la volatilité implicite Black& Scholes  $\Sigma(T, K)$ , définie pour  $(T, K)$  fixes et pour une observation  $C(t_0, S; T, K)$  par

$$C(t_0, S; T, K) = C^{BS}(t_0, S; T, K, \Sigma(T, K))$$

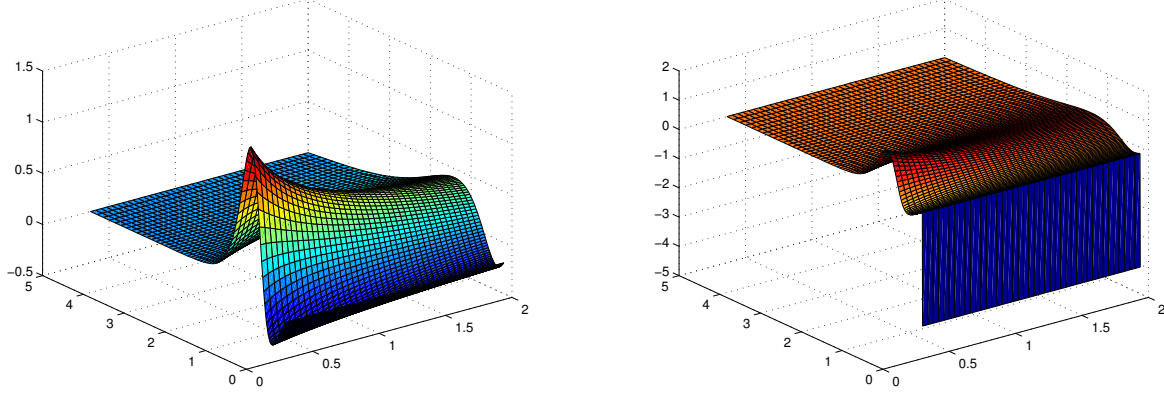


FIG. 2.1 – Sensibilité de  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(T, x)$  par rapport au bruit d'observations. A gauche : la dérivée seconde en  $K$  d'une nappe de prix Black-Scholes avec  $\sigma = .4$ . A droite : la même dérivée seconde pour la nappe lorsqu'on y ajoute une perturbation relative de .5%

l'EDP de Dupire en terme de volatilité implicite est une EDP parabolique non linéaire qui lie la volatilité locale à la volatilité implicite [10] :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\tau \Sigma \Sigma_\tau + \Sigma^2 + \sigma^2(x, \tau) (1 - x \frac{\Sigma_x}{\Sigma})^2 - \sigma^2(x, \tau) \tau \Sigma \Sigma_{xx} + \frac{1}{4} \sigma^2(x, \tau) \tau^2 \Sigma^2 \Sigma_x^2 = 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Sigma(x, \tau)} = \int_0^1 \frac{ds}{\sigma(sx, 0)} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec  $x = \ln(\frac{K}{S}) + r\tau$  et  $\tau = T - t$ .

### 2.2.2 Calibration sur des données bruitées et incomplètes

Comme nous l'avons remarqué, la formule de Dupire (2.5) nécessite la disponibilité de prix (uniques) de calls pour toutes maturités  $T$  et tous les prix d'exercice  $K$ . Mais en pratique nous disposons d'un nombre fini de calls  $\{C^*(T_i, K_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ , dont les prix sont connus à une fourchette bid-ask  $\delta$  près :

$$E|C^\delta(T_i, K_i) - C^*(T_i, K_i)| \leq \delta$$

- On estime souvent la volatilité locale en appliquant la formule de Dupire à partir d'une interpolation des  $C^\delta(K_i, T_i)$ .

$$(\sigma^\delta)^2(K_i, T_i) = 2 \frac{\frac{\partial C^\delta}{\partial T}(K_i, T_i) + rK \frac{\partial C^\delta}{\partial K}(K_i, T_i)}{K_i^2 \frac{\partial^2 C^\delta}{\partial K^2}(K_i, T_i)}$$

- Une fois qu'on a déterminé  $\sigma^\delta(.,.)$ , on l'utilise pour calculer la valeur  $P^\delta(.,.)$  d'une option Européenne de flux terminal  $h(K)$ , en résolvant :

$$\begin{cases} \frac{\partial P^\delta}{\partial T} = \frac{(\sigma^\delta)^2(K,T)}{2} K^2 \frac{\partial^2 P^\delta}{\partial K^2} - rK \frac{\partial P^\delta}{\partial K} \\ P^\delta(t_0, K) = h(K) \end{cases}$$

où à barrière en résolvant un système de même type avec conditions au bords.

La question, que nous allons traiter dans ce chapitre, est de quantifier l'impact de l'erreur d'estimation de  $\sigma$  sur le calcul de  $P(S, t)$ .

Plus généralement on peut traiter cette question pour d'autres estimateurs  $\hat{\sigma}^\varepsilon(t, S)$  de la volatilité locale : pour calculer la valeur des options dont le sous-jacent suit le modèle de diffusion, il faut connaître la fonction de volatilité locale  $\sigma(t, S)$  : elle n'est pas directement observée mais doit être estimée à partir d'observations. Soit  $\hat{\sigma}^\varepsilon(t, S)$  un tel estimateur, avec une précision  $\varepsilon$ . Voici quelques questions pertinentes que nous allons traiter :

1. La précision n'est pas uniforme en  $(T, K)$  : pour  $K$  loin de la monnaie, les observations sont rares et la précision faible. Comment faut-il définir la précision et la convergence des estimateurs ?
2. Si  $\hat{\sigma}^\varepsilon(.,.)$  converge vers  $\sigma(.,.)$ , les prix d'options (Européennes, barrières) calculés avec  $\hat{\sigma}^\varepsilon$  convergent-ils vers ceux calculés avec  $\sigma$  ?
3. Que peut-on dire de l'impact de l'erreur sur  $\sigma$  sur les prix (vitesse de convergence) ?
4. Peut-on analyser l'impact de ces erreurs d'estimation sur les prix d'option calculés avec la volatilité estimée  $\sigma(.,.)$  en estimant une vitesse de convergence ?
5. Comment se comportent ces estimations dans le cas des méthodes usuelles de calibration, comme les méthodes basées sur la formule de Dupire ?

### 2.2.3 Changement de variable

Afin d'obtenir une EDP avec coefficients et solution bornés, on effectue d'abord un changement de variable logarithmique  $(T, K) \longrightarrow (\tau, x)$ . On pose

$$x = \ln\left(\frac{K}{S}\right) + r\tau, \quad \tau = T - t \quad \text{et} \quad v(\tau, x) = \exp\{-\sqrt{x^2 + 1}\} u(\tau, x)$$

avec

$$u(\tau, x) = e^{r\tau} C(K, T)/S \quad ; \quad a(\tau, x) = \frac{\sigma^2(T, K)}{2}$$

alors  $v(\tau, x)$  est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = a(\tau, x) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x) v \right\} \quad \forall (\tau, x) \in R_+^* \times R \\ v(0, x) = v_0(x) \quad \forall x \in R \end{cases} \quad (2.7)$$



et que  $w(\tau, x) = \frac{\partial v}{\partial x}$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} = a(\tau, x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1(\tau, x) \frac{\partial w}{\partial x} + c_1(\tau, x) w + d(\tau, x) v \\ w(x, 0) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $b(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$  ,  $c(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$b_1(\tau, x) = (b(x) + \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, x))$  ,  $c_1(\tau, x) = \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, x) + \frac{\partial b}{\partial x}(x) + c(x)$  et  $d(\tau, x) = \frac{\partial a}{\partial x}(\tau, x) + \frac{\partial c}{\partial x}(x)$

On remarque que si  $|\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}| \leq \lambda$  alors  $\forall x \in R$  on a :

$$|b(x)| , |c(x)| , \left| \frac{\partial b}{\partial x} \right| , \left| \frac{\partial c}{\partial x} \right| \leq \lambda$$

$$v_0 = \exp\{-\sqrt{x^2 + 1}\}(1 - e^x)_+ \in C_0(R) \quad \text{et} \quad w_0 \in C_0(R^*)$$

où  $C_0(R)$  représente l'ensemble des fonctions continues qui converge vers zeros à l'infini.

Dans la section suivante nous allons étudier le passage à la limite dans le coefficient de diffusion  $a(.,.)$  pour des équations de type (2.7) et (2.8) .

## 2.3 Homogénéisation d'une équation parabolique : estimation de vitesse de convergence

On considère la solution de

$$\frac{\partial v^n}{\partial t} = a^n(x, t, w) \left\{ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v^n}{\partial x} + c(x) v^n \right\} \quad v^n(0, x) = v_0(x) \quad (2.9)$$

où  $\{a^n(x, t, w)\}_{n=1,2,\dots}$  est une suite de champs aléatoires qui converge vers une limite  $a(x, t)$  à une certaine vitesse locale. On étudie alors la vitesse de convergence de  $v^n$  vers la solution  $v$  de

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x) v \right\} \quad v(0, x) = v_0(x)$$

en fonction de la vitesse de convergence de  $a^n(t, x)$  vers  $a(t, x)$ .

Sur le plan mathématique il s'agit d'estimer une vitesse de convergence dans un problème d'homogénéisation d'une EDP parabolique à coefficients aléatoires, qui consiste à étudier la stabilité de la solution (qui est le prix de l'option) lorsqu'on dispose d'une suite d'estimateurs (entachés d'erreur d'observation donc aléatoires)

pour le coefficient de diffusion  $\sigma^2(t, x)$ . Ce problème a été traité dans la littérature (voir notamment [55]) mais souvent dans le cas où l'équation limite est d'un ordre inférieur (méthode de viscosité évanescence) ou bien lorsque les coefficients possèdent une structure spatiale (périodique, ergodique,...). Ici notre problème est différent : l'équation est linéaire et ne possède pas de structure particulière mais nous souhaitons obtenir une estimation de la vitesse de convergence, pas seulement identifier la limite.

### 2.3.1 Convergence de champs aléatoires

Considérons un espace de probabilité auxiliaire  $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$  représentant l'"erreur d'estimation" ou l'erreur de reconstruction des coefficients de l'EDP. Un *champ aléatoire* sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  est défini comme une fonction mesurable

$$a : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

et modélise une fonction aléatoire définie sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ .

Afin de donner un cadre mathématique précis au problème décrit ci-dessus on va introduire une notion de convergence locale de champs aléatoires, utilisé dans [49] sous le nom de *well-mixing*.

Introduisons un pavage de l'espace en une suite imbriquée d'intervalles

$$B_{m,z} = [2^{-m}z, 2^{-m}(z+1)[$$

Ici  $z \in Z$  représente la localisation d'un intervalle et  $m \in N$  son *échelle*.

#### Définition 2.3.1.1 (Convergence locale d'une suite de champs aléatoires)

Soit  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable donnée et  $q(m, n)_{m,n \geq 1}$  une suite réelle positive avec

$$\forall m \in N^* \quad q(m, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On dira qu'une suite de fonctions aléatoires  $\{a^n(x, t)\}_{n \geq 0}$  converge localement vers  $a$  à la vitesse  $q(m, n)$  si, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\sup_{(z,n) \in Z \times N} \left\{ \frac{1}{q(m, n)} E \left| \int_{B_{m,z}} (a^n - a) \, dx \right| \right\}$$

est bornée uniformément en  $t$ , où  $B_{m,z} = [2^{-m}z, 2^{-m}(z+1)[$ .

Cela signifie que  $a^n \rightarrow a$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  à la vitesse  $q(m, n)$  localement sur  $B_{m,z}$ .

Commençons d'abord par remarquer qu'une suite déterministe de fonctions  $a^n(., .)$  qui converge vers  $a(., .)$  dans  $L^1_{\text{loc}}$  uniformément en  $t \in [0, T]$  alors elle converge localement vers  $a$  dans le sens de notre définition à la vitesse

$$q(m, n) = \left| \int_{2^{-m}z}^{2^{-m}(z+1)} (a^n - a) \, dx \right|$$

**Exemple 2.3.1.1** Soit  $\mathcal{E}_{n,z}$  une famille de variables aléatoires indépendantes, qui représente l'incertitude sur les observations situées dans l'intervalle  $B_{m,z}$ . Si on pose pour  $n \in Z$  :

$$a^n(x, t) = a(x, t) + \mathcal{E}_{n,z} 1_{B_{n,z}}(x)$$

alors pour  $n > m$

$$(a_n(x, t) - a(x, t))1_{B_{m,z}} = \mathcal{E}_n 1_{B_{m,z}} \leq \sum_{\tilde{z}} \mathcal{E}_{n,\tilde{z}}$$

ce qui donne, pour  $m \in N$  et  $z \in Z$  ;

$$E \left| \int_{B_{m,z}} (a^n(x, t) - a(x, t)) dx \right| \leq E |\mathcal{E}_{n,z}| 2^{n-m} \quad (2.10)$$

Si on suppose alors que  $E |\mathcal{E}_n| < 2^{-3n}$ , alors on obtient

$$[q(m, n)]^{-1} E \left| \int_{B_{m,z}} (a^n(x, t) - a(x, t)) dx \right| \leq 2^{-n} \quad \text{avec} \quad q(m, n) = 2^{-n+m} \quad (2.11)$$

ce qui montre que  $(a^n)$  est converge localement vers  $a$  à la vitesse  $2^{-n+m}$ .

## 2.3.2 Vitesse de convergence de la solution

On considère maintenant les EDP suivantes à coefficients aléatoires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v^n(t, x, w) &= a^n(x, t, w) \left\{ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v^n}{\partial x} + c(x) v^n \right\} \\ v^n(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) &= a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x) v \right\} \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où  $v_0 \in C_0(R)$  et  $(\frac{1}{a^n(x, t)})_n$  converge localement –dans le sens de la définition 2.3.1.1– vers  $\frac{1}{a(x, t)}$  avec une vitesse  $q(m, n)$ . L'existence et la croissance de la solution des systèmes précédents est expliquée dans la démonstration du lemme (2.3.1) suivant.

**Lemme 2.3.1** Soit  $v(x, t)$  solution du système (2.13) avec  $b, c$  des fonctions bornées. Supposons de plus que

$$\exists \lambda \geq 1 \quad \text{telle que;} |a(x, t)| \leq \lambda \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \right| \leq \lambda$$

Alors  $\exists c \geq 0$  telle que si  $|x - y| \leq 1$  et  $t \leq 1$  on a :

$$|v(x, t) - v(y, t)| \leq \frac{|x - y|^c}{t^{\frac{1}{2}}} \zeta(x)$$

avec  $\zeta \in L^1(R) \cap L^2(R)$  et à décroissance exponentielle.

**Remarque 2.3.2.1** Notons que ce résultat ne nécessite pas que le coefficient de diffusion soit “non-dégénéré” : on a besoin d’une borne supérieure pour la volatilité mais elle peut être arbitrairement proche de zéro.

### Démonstration 2.3.1

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x)v \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + [ab(x) - \frac{\partial a}{\partial x}] \frac{\partial v}{\partial x} + ac(x)v \end{aligned}$$

Les coefficients  $b$  et  $c$  de l’équation (2.13) sont bornés et  $a \in L^1_{\text{loc}}(R)$  donc pour  $x, y \in R$  et  $t > \tau \geq 0$ . D’après [5] la solution fondamentale  $K(x, y, t, \tau)$  satisfait l’inégalité suivante :

$$K(x, y, t, \tau) \leq \frac{C}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left\{-\frac{|x - y|^2}{C(t - \tau)}\right\} \quad \text{pour } |x - y| \leq 1 \text{ et } t \leq 1$$

où  $C$  dépend seulement de  $\lambda$ .

D’après le lemme de Krylov [47, p. 133], si  $|x - y| \leq \sqrt{t}$

$$|v(x, t) - v(y, t)| \leq C \frac{|x - y|^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \sup_{\{(z, s); |z - x| \leq \sqrt{t}, s \leq t\}} \{|v(z, s)|\}$$

où  $\alpha$  et  $C$  ne dépend pas du coefficient de diffusion  $a(\cdot, \cdot)$ .

Soit  $(x, y)$  tel que  $|x - y| \leq 1$ , on note par  $N = \lceil \frac{|x - y|}{\sqrt{t}} \rceil + 1$ , alors

$$\begin{aligned} &|v(x, t) - v(y, t)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left| v\left(x + \frac{(i+1)(y-x)}{N}, t\right) - v\left(x + \frac{i(y-x)}{N}, t\right) \right| \\ &\leq CN \frac{\left(\frac{|x-y|}{N}\right)^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \sup_{\{(z, s); |z-x| \leq |y-x|, s \leq t\}} \{|v(z, s)|\} \\ &= CN^{1-\alpha} \frac{|x - y|^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \sup_{\{(z, s); |z-x| \leq |y-x|, s \leq t\}} \{|v(z, s)|\} \end{aligned}$$

$$\leq CN^{1-\alpha} \frac{|x-y|^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \zeta(x)$$

où

$$\zeta(x) = \sup_{\{(z,s); |z-x| \leq 1, s < 1\}} \left\{ \int |v_0(y)K(x, y, 0, s)| dy \right\} \quad (2.14)$$

et

$$|v(x, t) - v(y, t)| \leq C \left\{ \frac{|x-y|^\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}} + 2 \frac{|x-y|}{\sqrt{t}} \right\} \zeta(x)$$

ce qui prouve le lemme puisque  $\zeta \in L^1(R) \cap L^2(R)$  est à décroissance exponentielle.

La solution de (2.13) est dans  $C^\infty(R_+^* \times R)$ . Pour traiter le problème de l'éventuelle non-régularité de la solution à l'origine, on étudiera la solution sur un intervalle  $[\varepsilon, T] \times R$ . En profitant de l'unicité de solution pour le système (2.13) on déduit que la solution régulière sur  $[\varepsilon, T] \times R$  converge vers la solution sur  $[0, T] \times R$ . On va utiliser cette méthode, pour montrer certaines propriétés de la solution  $v(t, x)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 2.3.2** Si on suppose de plus que le coefficient de diffusion  $a(x, t)$  satisfait :

$$\frac{\frac{\partial a}{\partial t}(t, x)}{a(t, x)} \leq \lambda \quad (2.15)$$

alors  $\frac{\partial v}{\partial t}$  vérifie le résultat du lemme (2.3.1).

**Démonstration 2.3.2** Soit  $0 < \varepsilon \ll 1$ , pour  $(t, x) \in [\varepsilon, T] \times R$  On note par

$V_1(t, x) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, x)$  alors elle est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V_1}{\partial x} + c(x) V_1 \right\} + \frac{\frac{\partial a}{\partial t}}{a} V_1 \forall (t, x) \in [\varepsilon, T] \times R \\ V_1(x, \varepsilon) = L(v_\varepsilon)(x, \varepsilon) \in C_0 \forall x \in R \end{cases}$$

où  $L(\cdot)$  est l'opérateur défini par :  $L(\cdot) = a(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} \right\} + b(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x} + c(x)$ .

Avec l'hypothèse (2.15) sur  $a(x, t)$ , tous les coefficients de cette EDP sont bornés et le terme de diffusion reste le même que le système pour  $v$ , par suite  $V_1$  vérifie le résultat du (2.3.1). Pour  $|x-y| \leq 1$  et  $\varepsilon \leq t \leq 1$  on a :

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial v}{\partial t}(t, y) \right| \leq \frac{|x-y|^c}{t^{\frac{1}{2}}} \xi(x) \quad (2.16)$$

où  $\xi \in L^1(R) \cap L^2(R)$  est à décroissance exponentielle.

Soient  $0 < \varepsilon < T$  et pour  $(t, x) \in [\varepsilon, T] \times R$ ,  $v^{n,\varepsilon}(t, x)$  solution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{n,\varepsilon}}{\partial t} &= a^n(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v^{n,\varepsilon}}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v^{n,\varepsilon}}{\partial x} + c(x) v^{n,\varepsilon} \right\} \\ v^{n,\varepsilon}(x, \varepsilon) &= v^n(x, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donc

$$\frac{1}{a^n(x, t)} \frac{\partial v^{n,\varepsilon}}{\partial t}(x, t) = \left\{ \frac{\partial^2 v^{n,\varepsilon}}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v^{n,\varepsilon}}{\partial x} + c(x) v^{n,\varepsilon} \right\}$$

et  $v(x, t)$  solution de (2.13) vérifie

$$\frac{1}{a(x, t)} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x) v \right\}$$

alors,  $\forall [t, x] \in [\varepsilon, T] \times R$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^n(x, t)} \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial t}(x, t) &= \left\{ \frac{\partial^2 (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x} + c(x) (v - v^{n,\varepsilon}) \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{a^n(x, t)} - \frac{1}{a(x, t)} \right\} \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

On multiplie (2.18) par  $2(v - v^{n,\varepsilon})(t, x)$  et on intègre sur  $[\varepsilon, t] \times R$  ;

$$\begin{aligned} &\int_R \int_\varepsilon^t \frac{1}{a^n(x, s)} \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})^2}{\partial s}(x, s) dx ds \\ &= \int_\varepsilon^t \int_R \left( \frac{\partial^2 (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x} + c(x) (v - v^{n,\varepsilon}) \right) 2(v - v^{n,\varepsilon}) dx ds \\ &+ \int_\varepsilon^t \int_R \left( \frac{1}{a^n(x, s)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) 2(v - v^{n,\varepsilon}) dx ds \end{aligned}$$

Or

$$\int_\varepsilon^t \int_R 2 \frac{\partial^2 (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x^2} (v - v^{n,\varepsilon}) dx ds = - \int_\varepsilon^t \int_R \left( \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x} \right)^2 dx ds \leq 0$$

et

$$\int_\varepsilon^t \int_R 2 \left( b(x) \frac{\partial (v - v^{n,\varepsilon})}{\partial x} + c(x) (v - v^{n,\varepsilon}) \right) (v - v^{n,\varepsilon}) dx ds \leq 0$$

Donc

$$\int_R |v - v^{n,\varepsilon}|^2(x, t) dx \leq C \int_\varepsilon^t \int_R \left( \frac{1}{a^n(x, s)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) (v - v^{n,\varepsilon}) dx ds$$

puisque  $\frac{\partial v}{\partial t}$  vérifie le résultat du lemme (2.3.1), On peut alors donner une majoration

du terme à droite en fonction de vitesse de convergence de  $\frac{1}{a^n}$  vers  $\frac{1}{a}$ .  
A partir du lemme (2.3.1), et si  $|x - y| \leq r$  et  $x, y \in B \subset R$  on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial v}{\partial s}(x, s)[v(s, x) - v^{n, \varepsilon}(s, x)] - \frac{\partial v}{\partial s}(y, s)[v(s, y) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] \right| \\
& \leq | [v(s, x) - v^{n, \varepsilon}(s, x)] \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) - [v(s, y) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) | \\
& + | [v(s, y) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) - [v(s, y) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] \frac{\partial v}{\partial s}(y, s) | \\
& \leq | [v(s, x) - v(s, y)] \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) - [v^{n, \varepsilon}(s, x) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] \frac{\partial v}{\partial s}(x, s) | \\
& + | [v(s, y) - v^{n, \varepsilon}(s, y)] [\frac{\partial v}{\partial s}(x, s) - \frac{\partial v}{\partial s}(y, s)] | \\
& \leq C \frac{r^{c_1}}{s^{\frac{1}{2}}} \sup_{x \in B} \{ \zeta(x) \}
\end{aligned}$$

où  $\zeta$  est une fonction à décroissance exponentielle.

On décompose  $R = \cup_{z \in \mathbb{Z}} B_{m, z}$  et on prend un point  $y_{m, z}$  de chaque intervalle  $B_{m, z}$  :

$$\begin{aligned}
E\{ \int_R v(t, x) - v^{n, \varepsilon}(t, x, w)^2 dx \} & \leq \sum_z \int_{\varepsilon}^t E \int_{B_{m, z}} [v(s, y_{m, z}) - v^{n, \varepsilon}(s, y_{m, z})] \\
& \quad \left( \frac{1}{a^n(x, s)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) \frac{\partial v}{\partial s}(s, y_{m, z}) dx ds + C \sum_z \sqrt{t} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{m, z}} \{ \zeta(x) \}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

**Proposition 2.3.2.1** Soient  $v(x, t)$  et  $v^n(x, t)$  solutions respectives de (2.13) et (2.12) avec  $b$  et  $c$  bornés,  $a$  qui vérifie les conditions du lemme (2.3.1) et  $v_0 \in C_0$ . On suppose que  $\{ \frac{1}{a^n(x, t)} \}_n$  converge localement vers  $\frac{1}{a(x, t)}$  à la vitesse  $q(m, n)$  uniformément en  $t$ . On a alors, pour tout compact  $K \subset R$  :

$$E\{ \int_K |v(x, t) - v^n(x, t)|^2 dx \} \leq C(K) [t 2^{m-1} q(m, n) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}]$$

pour toute  $m \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

De plus  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  telle que pour  $m > m_0$ ,

$$[t 2^{m-1} q(m, n) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc  $v^n(., t) \rightarrow v(., t)$  dans  $L_2(K)$  uniformément en  $t$ .

### Démonstration :

Soient  $v$ ,  $v^n$  et  $v^{n, \varepsilon}$  solutions respectives de (2.13), (2.12) et (2.17) alors :  
 $\forall \varepsilon ]0, T], t \in [\varepsilon, T]$  et  $K$  compact de  $R$  on a :

$$\|v - v^n\|_{L^2(K)}(t) \leq \|v - v^{n, \varepsilon}\|_{L^2(K)}(t) + \|v^{n, \varepsilon} - v^n\|_{L^2(K)}(t)$$

D'après [5],

$$v^{n,\varepsilon}(t, x) = \int_R v(y, \varepsilon) K^n(x, y, t, \varepsilon) dy \quad \text{et} \quad v^n(t, x) = \int_R v^n(y, \varepsilon) K^n(x, y, t, \varepsilon) dy$$

par suite

$$|v^{n,\varepsilon}(t, x) - v^n(t, x)| \leq \int_R [v(y, \varepsilon) - v^n(y, \varepsilon)] K^n(x, y, t, \varepsilon) dy$$

or

$$y \rightarrow K^n(x, y, t, \tau) \in L^2(K)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^n(x, \varepsilon) = v_0(x)$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^{n,\varepsilon} - v^n\|_{L^2(K)}(t) = 0$$

Maintenant, on revient au calcul de  $\|v - v^{n,\varepsilon}\|_{L^2(K)}(t)$ , il est clair qu'à partir de (2.19), on peut écrire :

$$\begin{aligned} & E\left\{ \int_K [v(t, x) - v^{n,\varepsilon}(t, x, w)]^2 dx \right\} \\ & \leq \sum_{\tilde{z} \in Z} \sum_{2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}} \cap K} \int_{\varepsilon}^t |E[v(s, y_{m,z}) - v^{n,\varepsilon}(s, y_{m,z})] \frac{\partial v}{\partial s}(s, y_{m,z})| \\ & \int_{B_{m,z} \cap K} \left( \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a} \right) dx \mid ds + C \sum_{\tilde{z} \in Z} \sum_{2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}} \cap K} t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{m,z} \cap K} \{\zeta(x)\} \\ & \leq C \sum_{\tilde{z} \in Z} \sup_{z; 2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}} \cap K} \int_0^t E\{[v - v^{n,\varepsilon}](s, y_{m,z}, w) \\ & \frac{\partial v}{\partial s}(s, y_{m,z}) \mid \int_{B(m,z) \cap K} \left( \frac{1}{a^n(x, s)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) dx \mid \} ds \\ & + C \sum_{\tilde{z} \in Z} \sum_{2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}} \cap K} t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{m,z}} \{\zeta(x)\} \\ & \leq C \sum_{\tilde{z} \in Z} 2^{(m-1)} \sup_{(z, 2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}} \cap K)} \int_0^t E\{[v(s, y_{m,z}) - v^{n,\varepsilon}(s, y_{m,z}, w)] \frac{\partial v}{\partial s}(s, y_{m,z}) \\ & \mid \int_{B_{m,z} \cap K} \left( \frac{1}{a^n(x, s, w)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) dx \mid ds\} + C \sum_{\tilde{z} \in Z} t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{1,\tilde{z}} \cap K} \{\zeta(x)\} \\ & \leq C \sum_{\tilde{z} \in Z} 2^{m-1} \int_0^t \sup_{2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}}} \{\zeta(y_{m,z})\} \sup_{2^{-m}z \in B_{1,\tilde{z}}} E \mid \int_{B_{m,z}} \left( \frac{1}{a^n(x, s, w)} - \frac{1}{a(x, s)} \right) dx \mid ds \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + C \Sigma_{\bar{z}} t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{1,\bar{z}}} \{\zeta(x)\} \\
& \leq C \Sigma_{\bar{z}} 2^{m-1} t \sup_{2^{-m} z \in B_{1,\bar{z}}} \{\zeta(y_{m,z})\} \sup_z \{E \mid \int_{B_{m,z}} (\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a}) dx \mid\} + C \Sigma_{\bar{z}} t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m} \sup_{x \in B_{1,\bar{z}}} \{\zeta(x)\} \\
& \leq C 2^{m-1} t \sup_z E \mid \int_{B_{m,z}} (\frac{1}{a^n} - \frac{1}{a}) dx \mid + C t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}
\end{aligned}$$

Par conséquent ,on a :

$$\begin{aligned}
& E \mid \int_K \mid u(t, x) - u^{n,\varepsilon}(t, x, w) \mid^2 dx \mid \\
& \leq C [t 2^{m-1} q(m, n) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}]
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat demandé, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ce résultat s'applique à l'équation de Dupire en coordonnées logarithmiques (2.8). Nous voyons donc que l'erreur résultant sur les prix d'options est de l'ordre de l'erreur d'estimation sur *l'inverse du carré de la volatilité*  $1/\sigma(t, x)^2$ .

On peut montrer aussi la convergence de  $u$  dans un espace de Sobolev (ex.  $H^1$ ) en ajoutant d'autres hypothèses sur le coefficient de diffusion  $a$ . Par exemple pour avoir le même résultat de convergence pour la fonction  $w = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$ , il suffit d'ajouter l'hypothèse

$$\lambda^{-1} \leq a(x, t) \leq \lambda \quad (2.20)$$

Alors la convergence dans la Proposition (2.3.2.1) a lieu dans l'espace  $H^1(K)$ , Notons que cette hypothèse de non-dégénérescence (2.20) est seulement utilisée ici pour la convergence des dérivées de la solution et pas pour la convergence de la solution elle-même.

**Proposition 2.3.2.2** *Soient  $\{a^n(x, t, w)\}_n$  une suite de fonction aléatoire qui satisfait aux hypothèses (2.15 et 2.20). Alors si  $\frac{1}{a^n}$  converge localement vers  $\frac{1}{a}$  à la vitesse  $q(m, n)$  on aura*

$$\forall t \in ]0, T_{max}] \quad E \|v^n(x, t) - v(x, t)\|_{H^1(K)} \leq C [q(m, n) + t 2^{m-1} q(m, n) + t^{1/2} 2^{-c_1 m}] \quad (2.21)$$

**Démonstration 2.3.3**  $w(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$  est solution de :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + c_1(x, t) w \right\} + d_1(x, t) v(x, t) \\
w(0, x) &= w_0(x)
\end{aligned}$$

Avec les coefficients  $b_1, c_1$  et  $d_1$  s'écrivent en fonction des coefficients  $a, b$  et  $c$  et on vérifie qu'ils sont bornés. On fait l'hypothèse que la suite  $\frac{1}{a^n}$  est Well-mixing de moyenne  $\frac{1}{a}$  et de vitesse de convergence  $q(m, n)$ , et puisque la fonction  $a(x, t)$  est

bornée alors la fonction  $a^n(x, t)$  est aussi *well-mixing* de moyenne  $a(x, t)$  et de vitesse de convergence  $q(m, n)$ .

Par suite si on note par  $w^n(x, t) = \frac{\partial v^n}{\partial x}$  et  $f^n(x, t) = w^n(x, t) - w(x, t)$ , alors  $f^n(x, t)$  est solution de l'EDP parabolique avec terme source et condition initiale nulle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^n}{\partial t} &= a^n(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^2} + b_1(x, t) \frac{\partial f^n}{\partial x} + c_1(x, t) f^n \right\} + d_1(x, t) (v^n(x, t) - v(x, t)) \\ &\quad + (a^n(x, t) - a(x, t)) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1(x) \frac{\partial w}{\partial x} + c_1(x) w \right\} \\ f^n(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

Or  $a^n$  et  $a$  vérifient l'hypothèse (2.20), alors  $\frac{1}{a^n}$  est *well-mixing* de moyenne  $\frac{1}{a}$  donne la convergence dans  $L^2(K)$  de  $a_1^n$  vers  $a_1$ , par suite :

$$\begin{aligned} E \|f^n\|_{L^2(K)} &= E \|w^n - w\|_{L^2(K)} \leq C_1 E \|a_1^n - a_1\|_{L^2(K)} + C_2 E \|v^n - v\|_{L^2(K)} \\ &\leq C [q(m, n) + t 2^{m-1} q(m, n) + t^{1/2} 2^{-c_1 m}] \end{aligned}$$

Ce qui montre la convergence  $L^2(K)$  de  $\frac{\partial v^n}{\partial x}$  vers  $\frac{\partial v}{\partial x}$  pour tout compact  $K$ . On en déduit la convergence de  $v^n(x, t)$  vers  $v(x, t)$  dans  $H^1(K)$ .

**Remarque 2.3.2.2** Les convergences dans les propositions (2.3.2.1 et 2.3.2.2) sont pour  $t$  fixe et pour tout  $m \in N$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  alors  $\exists m_0 \in N$  tel que pour  $m \geq m_0$ ,  $t^{1/2} 2^{-c_1 m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\exists n_0 > 0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, t 2^{m-1} q(m, n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui montre que l'erreur d'estimation sur la solution de l'EDP est inférieure à  $\varepsilon$ .

## 2.4 Application à la formule de Dupire

Nous allons appliquer maintenant les résultats ci-dessus à une classe souvent utilisée d'estimateurs de fonctions de volatilité, donnée par la formule de Dupire [34] décrite dans la Section 2.2.

### 2.4.1 Convergence de la volatilité de Dupire :

On a supposé que ;

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ telle que } a(x, t) = \frac{\sigma^2(K, t)}{2} \leq \lambda \text{ et } \left| \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \right| = \left| \frac{K}{2} \frac{\partial \sigma^2(K, t)}{\partial K} \right| \leq \lambda$$

D'après la formule de Dupire (2.5) la volatilité locale est donnée par l'expression suivante :

$$a(x_i, \tau_i) = \frac{\frac{\partial u}{\partial \tau}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x_i) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x_i) u}(x_i, \tau_i) \quad (2.22)$$

Puisque les données du marché sont discrètes et les  $x_i = \ln(\frac{K_i}{S})$  sont bornés, il faut donc localiser le système sur l'intervalle  $[x_0, x_n]$  ; que l'on suppose égal à  $[-\kappa, \kappa]$ .

### 2.4.2 Localisation du système

On peut définir la fonction de volatilité à partir des observations qui sont données que sur un intervalle  $[-\kappa, \kappa]$ , donc soit  $v_\kappa$  solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = a(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x) v \right\}(x, t) & \forall (x, t) \in [-\kappa, \kappa] \times ]0, T] \\ v(-\kappa, t) = v(\kappa, t) = f(t) & \forall t \in [0, T] \\ v(x, 0) = v_0(x) & \forall x \in [-\kappa, \kappa] \end{cases} \quad (2.23)$$

**Proposition 2.4.2.1** Soient  $v$  et  $v_\kappa$  solutions respectives de (2.13) et (2.23) avec  $v_0 \in C_0$ , alors ;

$$|v(t, x) - v_\kappa(t, x)| \leq C \|v_0\|_\infty \exp\{-c(\kappa - |x|)\}$$

pour tout  $x \in [-\kappa, \kappa]$  où  $C$  est une constante qui dépend que de  $t$  et  $v_0$ .

### 2.4.3 Estimation de la volatilité par interpolation linéaire à partir de la formule de Dupire

On pose  $\Delta t = \max\{t_{i+1} - t_i\}$  et  $\Delta x = \max\{x_{j+1} - x_j\}$   
Pour

$$x \in ]x_i, x_{i+1}] \text{ et } t \in ]t_j, t_{j+1}]$$

on définit ;

$$(f^\delta)(x, t) = \left( \frac{v^\delta(t_{j+1}, x_{i+1}) - v^\delta(t_j, x_{i+1})}{2(t_{j+1} - t_j)} + \frac{v^\delta(t_{j+1}, x_i) - v^\delta(t_j, x_i)}{2(t_{j+1} - t_j)} \right)$$

et

$$(g^\delta)(x, t) = \left( \frac{v^\delta(x_{i+1}, t_{j+1}) + v^\delta(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2v^\delta(x_i, t_{j+1})}{4(x_{i+1} - x_i)^2} \right) + \left( \frac{v^\delta(x_{i+1}, t_j) + v^\delta(x_{i-1}, t_j) - 2v^\delta(x_i, t_j)}{4(x_{i+1} - x_i)^2} \right)$$

où  $v^\delta(x_i, t_j)$  sont les prix observés pour des maturités  $t_j$  et des log-strikes  $x_i$ , avec  $E(\epsilon_{i,j}) = E|v^\delta(x_i, t_j) - v(x_i, t_j)| \leq \delta$  où  $\delta$  peut être interprété comme étant la fourchette bid-ask.

Et on définit aussi :

$$\tilde{f}(x, t) = \left( \frac{v(t_{j+1}, x_{i+1}) - v(t_j, x_{i+1})}{2(t_{j+1} - t_j)} + \frac{v(t_{j+1}, x_i) - v(t_j, x_i)}{2(t_{j+1} - t_j)} \right)$$

et

$$\tilde{g}(x, t) = \left( \frac{v(x_{i+1}, t_{j+1}) + v(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2v(x_i, t_{j+1})}{4(x_{i+1} - x_i)^2} \right) + \left( \frac{v(x_{i+1}, t_j) + v(x_{i-1}, t_j) - 2v(x_i, t_j)}{4(x_{i+1} - x_i)^2} \right)$$

où  $v(x_i, t_j)$  est le prix d'une option Européenne pour une maturité  $t_j$  et un log-strike  $x_i$ .

On a alors

$$\sup_{(t,x) \in ]0, \overline{T}] \times [-\kappa, \kappa]} |f^\delta(x, t) - \tilde{f}(x, t)| \leq C \frac{\delta}{\Delta T}$$

et

$$\sup_{(t,x) \in ]0, \overline{T}] \times [-\kappa, \kappa]} |g^\delta(x, t) - \tilde{g}(x, t)| \leq C \frac{\delta}{(\Delta x)^2}$$

Ces estimations peuvent être comprises soit comme des estimations déterministes soit au sens presque-sûr (par rapport à la distribution de l'erreur d'estimation  $P$ ).

Si on note alors par  $\tilde{a}(x, t)$  l'estimation de  $\sigma^2(K, T)$  obtenue en combinant ces approximations de différences finies et la formule de Dupire mais à partir des observations bruitées  $v^\delta(x_i, t_j)$  on a

$$a^\delta(x, t) = \frac{f^\delta(x, t)}{g^\delta(x, t)} \quad \text{et} \quad \tilde{a}(x, t) = \frac{\tilde{f}(x, t)}{\tilde{g}(x, t)} \quad (2.24)$$

La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour qu'un tel estimateur de volatilité conduise à des approximations localement convergentes pour les prix d'options, et donne une vitesse locale de convergence dans ce cas :

**Proposition 2.4.3.1 (Convergence locale de l'estimateur de Dupire)** *Soit  $a^\delta(x, t)$  l'estimateur de la fonction volatilité locale donné par 2.24. Si  $\Delta x \sim (2\delta)^{\frac{1}{3}}$ ,  $\Delta t \sim \delta^{\frac{1}{2}}$  alors*

$$\left\{ \frac{1}{a^\delta(x, t)} \right\}_\delta \quad \text{converge localement vers} \quad \frac{1}{a(x, t)}$$

à la vitesse  $q(m, \delta) = \delta^{\frac{1}{4}}$  indépendant de  $m \in N$ .

**Démonstration** En utilisant un développement de Taylor pour les approximations de différences finies sur la grille  $(x_i, t_j)$  on vérifie que :

$$\forall x \in [-\kappa, \kappa] \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T]$$

on a :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \tilde{f}(x, t) \right| \leq C [\Delta x + \Delta t] \\ & \left| \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x)v \right)(x, t) - \tilde{g}(x, t) \right| \leq C [\Delta x + \Delta t] \end{aligned}$$

Par suite , on a ;

$$\left| \frac{1}{\tilde{a}(x, t)} - \frac{1}{a(x, t)} \right| \leq C_1(\lambda, C) [\Delta x + \Delta t] \quad ; \forall x \in [-\kappa, \kappa] \text{ et } \forall t \in [0, T]$$

et

$$E \left| \frac{1}{a^\delta(x, t)} - \frac{1}{\tilde{a}(x, t)} \right| \leq C_1 \delta \left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} \right] \quad ; \forall x \in [-\kappa, \kappa] , \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \delta \geq 0$$

Ce qui donne

$$E \left| \frac{1}{a^\delta(x, t)} - \frac{1}{a(x, t)} \right| \leq C \left[ \delta \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + \Delta t + \Delta x \right]$$

Donc si la fonction d'observation  $\mathcal{C}(u(x, t)) = u^\delta(x_i, t_j)$  est telle que,  $\Delta x \sim (2\delta)^{\frac{1}{3}}$  et  $\Delta t \sim \delta^{\frac{1}{2}}$ , on aura donc ;

$$E \left| \frac{1}{a^\delta(x, t)} - \frac{1}{a(x, t)} \right| \leq C \delta^{\frac{1}{3}}$$

C'est à dire ;

$$\left\{ \frac{1}{a^\delta(x, t)} \right\}_\delta \text{ converge localement vers } \frac{1}{a(x, t)}$$

à la vitesse  $q(m, \delta) = \delta^{\frac{1}{4}}$ .

#### 2.4.4 Impact de l'estimation de la volatilité sur les prix des options

On définit  $v_\kappa^\delta(x, t)$  comme solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial v^\delta}{\partial t}(x, t) = & a^\delta(x, t) \left\{ \frac{\partial^2 v^\delta}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial v^\delta}{\partial x} + c(x)v^\delta \right\}(x, t) & \forall (x, t) \in [-\kappa, \kappa][0, T] \\ v^\delta(-\kappa, t) = g(t) & v^\delta(\kappa, t) = f(t) & \forall t \in [0, T] \\ v^\delta(x, 0) = & v_0(x) & \forall x \in [-\kappa, \kappa] \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur  $[0, T]$

**Proposition 2.4.4.1** Soit  $v_\kappa(x, t)$  et  $v_\kappa^\delta(x, t)$  solution de (2.23) et (2.25) telle que

$$\left\{ \frac{1}{a^\delta(x, t)} \right\}_{(\delta)} \text{ converge localement vers } \frac{1}{a(x, t)}$$

sur  $[-\kappa, \kappa]$ , uniformément de  $t \in [0, T]$  à la vitesse  $q(m, \delta)$  alors on a :

$$\begin{aligned} & E \left[ \int_{-\kappa}^{\kappa} |v_\kappa^\delta(x, t) - v_\kappa(x, t)|^2 dx \right] \\ & \leq E \left[ \int_{-\kappa}^{\kappa} \exp(-2|x|) |u^\delta(x, t) - u(x, t)|^2 dx \right] \leq C [t 2^{m-1} q(m, \delta) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-cm}] \end{aligned}$$

ou

$$u(x, t) = \frac{C(K, t)}{S} \quad \text{avec} \quad x = \ln\left(\frac{K}{S}\right)$$

**Preuve** C'est la même démonstration que celle de la proposition (2.3.2.1) en prenant  $K = [-\kappa, \kappa]$ .

**Proposition 2.4.4.2** (Cas des options européennes)

Soient  $u$  et  $u^\delta$  solutions respectives de (2.13) et (2.17) où les coefficients des équations vérifient les hypothèses (2.4.4.1). Nous avons alors l'estimation suivante

$$E \| (u - u^\delta)(x, t) \|_{L_2(R, \exp(-2|x|)dx)}^2 \leq C \exp(-\beta\kappa) + C[t 2^{m-1} q(m, \delta) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}]$$

En particulier les prix d'options estimés convergent vers leurs valeurs théoriques à la vitesse

$$C \exp(-\beta\kappa) + \inf_m C[t 2^{m-1} q(m, \delta) + t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1 m}]$$

dans  $L_2(R, \exp(-2|x|)dx)$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \| (u - u^\delta)(x, t) \|_{L_2(R, \exp(-2|x|)dx)}^2 & \leq \| (u - u^\delta)(x, t) \|_{L_2(R, \exp(-2\sqrt{1+x^2})dx)}^2 \\ & = \| (v - v^\delta)(x, t) \|_{L_2(R)}^2 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \| (v - v^\delta)(x, t) \|_{L_2(R)}^2 & = \| (v - v^\delta)(x, t) \|_{L_2([-\infty, -\kappa] \cup [\kappa, +\infty])}^2 \\ & + \| (v - v^\delta)(x, t) \|_{L_2([-\kappa, \kappa])}^2 \end{aligned}$$

Or d'après le lemme(2.3.1) on a  $v, v^\delta \in L_2(R)$  donc

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \| (v - v^\delta)(x, t) \|_{L_2([-\infty, -\kappa] \cup [\kappa, +\infty])}^2 = 0$$

et

$$\begin{aligned} \|(v - v^\delta)(x, t)\|_{(L^2([- \kappa, \kappa]))}^2 &\leq \|(v - v_\kappa)(x, t)\|_{(L^2([- \kappa, \kappa]))}^2 + \|(v_\kappa - v_\kappa^\delta)(x, t)\|_{(L^2([- \kappa, \kappa]))}^2 \\ &\quad + \|(v_\kappa^\delta - v^\delta)(x, t)\|_{(L^2([- \kappa, \kappa]))}^2 \end{aligned}$$

or on a :  $\forall (x, t) \in [-\kappa, \kappa][0, T]$

$$\|(v - v_\kappa)(x, t)\|_{L^2([- \kappa, \kappa])} \leq C \exp(-\beta\kappa)$$

et

$$\|(v^\delta - v_\kappa^\delta)(x, t)\|_{L^2([- \kappa, \kappa])} \leq C \exp(-\beta\kappa)$$

où C est un paramètre indépendant de  $\kappa$ .

et d'après la proposition (2.4.4.1) ;

$$\|(v_\kappa - v_\kappa^\delta)(x, t)\|_{(L^2([- \kappa, \kappa]))}^2 \leq C[t2^{m-1}q(m, \delta) + t^{\frac{1}{2}}2^{-c_1m}]$$

ce qui termine la démonstration.

## 2.4.5 Estimation de l'erreur sur les options barrières

Comme nous l'avons observé ci-dessus, la valeur d'une option à barrière est solution d'un problème parabolique avec condition au bord de Dirichlet. Par exemple la valeur d'une option d'achat de prix d'exercice K et barrière desactivante B est solution de l'équation (2.27).

Le prix d'une option call à barrière de maturité T et prix d'exercice K est donné par

$$C_b(t, S) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)_+ 1_{T < \theta_t} | S_t = S] \quad (2.26)$$

où  $\theta_t = \inf\{s \geq t / S_s \notin ]L, U[ \}$ .

$C_b(., .)$  est solution de l'EDP parabolique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_b}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}(t, S) S^2 \frac{\partial^2 C_b}{\partial S^2} & (t, S) \in (0, T) \times (U, L) \\ C_b(T, S) = (S - K)_+ & S \in (U, L) \\ C_b(t, S) = 0 & \text{si } S \notin (U, L) \end{cases} \quad (2.27)$$

Si on effectue le changement de variable  $x = \log(S/K)$ ,  $a(t, x) = \sigma^2(t, S)/2$  et  $u(t, x) = C_b(t, S)/K$ , alors u est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a(t, x) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} & (t, x) \in (0, T) \times (\log(\frac{U}{K}), \log(\frac{L}{K})) \\ u(T, x) = (e^x - 1)_+ & x \in (\log(\frac{U}{K}), \log(\frac{L}{K})) \\ u(t, x) = 0 & \text{si } x \notin (\log(\frac{U}{K}), \log(\frac{L}{K})) \end{cases} \quad (2.28)$$

On applique alors la proposition précédente pour un intervalle de localisation  $]b, l[ = (\ln(\frac{U}{K}), \ln(\frac{L}{K}))$  et des conditions aux bords  $f = g = 0$ , on montre dans la proposition suivante la convergence des prix des options à barrière.

**Proposition 2.4.5.1** (*Cas des options barrières*) Soit  $a^\delta$  la volatilité locale obtenue en appliquant aux prix des calls la version différences finies de la formule de Dupire. Sous les conditions de la Proposition 2.4.3.1 c'est-à-dire si  $\Delta x \sim (2\delta)^{\frac{1}{3}}$ ,  $\Delta t \sim \delta^{\frac{1}{2}}$  alors la valeur  $u^\delta$  d'une option barrière calculée avec la volatilité  $a^\delta$  converge vers sa valeur  $u$  calculée avec la volatilité  $a$ , et on a l'estimation suivante de l'impact de l'erreur d'estimation sur le prix de l'option barrière :

$$E \parallel (u - u^\delta)(x, t) \parallel_{(L_2([b, l]))}^2 \leq C(t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1(-\frac{\ln \delta}{3(1+c_1)})})$$

**Démonstration :**

Si on prend  $m = \lfloor -\frac{\ln \delta}{4(1+c_1)} \rfloor$ , alors  $3(1+c_1)m \leq -\ln \delta$  donc  $2^{(1+c_1)m} \leq \delta^{-\frac{1}{4}}$   
D'où d'après la Proposition (2.4.4.1) on a :

$$\parallel (u - u^n)(x, t) \parallel_{(L_2(R), \exp(-2|x|)dx)}^2 \leq C[t^{\frac{1}{2}} 2^{-c_1[-\frac{\ln \delta}{4(1+c_1)}]}]$$

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact sur les prix d'options des erreurs d'estimation de la fonction volatilité dans le cadre d'un modèle de diffusion. Sur le plan mathématique il s'agit de l'estimation d'une vitesse de convergence locale lorsqu'on passe à la limite dans le coefficient de diffusion d'une EDP parabolique sans structure spatiale particulière (comme la périodicité) : il faut estimer la vitesse de convergence de la solution étant donnée la vitesse de convergence des coefficients. Nous avons d'abord montré un tel résultat pour une EDP parabolique générale (Proposition 2.3.2.1). Notre résultat, un peu surprenant à première vue, est que l'erreur induite sur les prix d'options européennes est proportionnelle à l'erreur d'estimation sur l'inverse  $1/\sigma(t, x)$  de la volatilité c'est à dire

$$\frac{1}{\hat{\sigma}(t, x)^2} - \frac{1}{\sigma(t, x)^2}$$

calculée au point  $(t, x)$  correspondant aux caractéristiques de l'option. Les conditions de ce théorème sont faciles à vérifier pour les méthodes usuelles de "calibration" de la surface de volatilité locale.

Appliquant ce résultat à un estimateur particulier de volatilité, la formule de Dupire, nous avons montré une condition suffisante pour la convergence de cet estimateur de la volatilité locale qui garantit que les prix calculés avec cet estimateur



sont également convergents. Ce résultat montre que la vitesse optimale de convergence est obtenue lorsque une relation est vérifiée entre la taille de la grille des observations sur les options et la fourchettes bid-ask  $\delta$ . En particulier, il n'est pas optimal d'utiliser des strikes / maturités trop rapprochés en présence de fourchette bid-ask.

Ensuite, nous avons pu donner dans ce cas des estimations d'erreur sur les options barrières et les options européennes calculés avec la volatilité de Dupire. Ces estimations confirment l'intuition que l'erreur sur les prix d'options est loin d'être homogène en strike/sous-jacent et sa structure 'spatiale' reflète la structure des erreurs d'estimation dans l'inverse de la volatilité au carré.

## Deuxième partie

### Estimation des paramètres d'actifs financiers à sauts par une méthode numérique

# Chapitre 3

## Modèles à sauts en finance

### 3.1 Introduction

Après l'étude des modèles de diffusion dans la première partie de la thèse, nous nous intéressons dans cette partie à une deuxième extension du modèle de Black-Scholes, celle des modèles à sauts et plus particulièrement les modèles basés sur les processus de Lévy. La dynamique de ces modèles consiste d'ajouter à celle de Black-Scholes un terme discontinu dont la présence se justifie aussi bien par la présence de mouvements brusques dans les prix que par l'effet de smile de volatilité implicite qu'il induit dans les prix d'options. Dans le chapitre 3, on rappelle quelques propriétés des modèles d'évaluation "exponentielle – Lévy" et nous décrivons les méthodes de calibration proposées pour ces modèles dans la littérature. Dans le chapitre 4, nous exposerons une nouvelle approche pour la calibration d'un modèle exponentielle Lévy à un jeu de prix d'options, par régularisation de Tikhonov. Nous détaillerons entre autres le choix du paramètre de régularisation par le principe de Morozov, le choix des espaces de minimisation, la méthode de calcul du gradient par équation adjointe et nous discuterons la convergence de la solution du problème régularisé. Dans le chapitre 5 nous présenterons un algorithme numérique pour la calibration des modèles avec sauts et nous testerons sa performance d'abord sur des données simulées puis sur des données de marché d'options.

### 3.2 Modèle exponentielle Lévy : équations Backward et Forward

Considérons un espace de probabilité  $(\Omega, F, Q)$  que l'on fixe dans toute la suite.

### 3.2.1 Processus de Lévy : Définitions et Propriétés

Un processus de Lévy [23] [56]  $X_t$  est un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires qui est continu en probabilité tel que  $X_0 = 0$ . Un processus de Lévy est caractérisé par un triplet de paramètres  $(\gamma, \sigma, \nu) : \sigma \geq 0$ ; est la volatilité de la composante Brownienne de  $X_t$ ,  $\gamma$  une constante réelle et  $\nu$  une mesure positive sur  $R \setminus \{0\}$  qui satisfait aux conditions

$$\int_{-1}^1 x^2 \nu(dx) < \infty \quad ; \quad \int_{|x|>1} \nu(dx) < \infty \quad (3.1)$$

$\nu$  mesure l'intensité des sauts du processus  $X : \forall A \subset R \setminus \{0\}$

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0, 1], t.q. \Delta X_t \in A\}] = \frac{1}{T} E[\#\{t \in [0, T], t.q. \Delta X_t \in A\}] \quad (3.2)$$

Le mouvement Brownien avec dérive est le seul processus de Lévy ayant des trajectoires continues.

La fonction caractéristique d'un processus de Lévy de paramètres  $(\gamma, \sigma, \nu)$  est  $\phi$  donnée par la représentation suivante, dite de Lévy-Khinchin

$$E[e^{izX_t}] = \exp(t \phi(z)), \quad \phi(z) = -\frac{\sigma^2 z^2}{2} + i\gamma z + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{izx} - 1 - iz - 1_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \quad (3.3)$$

La mesure  $\nu$  d'un processus de Lévy n'est pas toujours finie. Dans le cas où  $\lambda = \int \nu(dy) < \infty$ , on dit que les sauts de  $X$  sont d'activité finie et on peut normaliser la mesure  $\nu$  et définir une mesure de probabilité

$$\nu_0(dy) = \frac{\nu(dy)}{\lambda} \quad (3.4)$$

qui représente alors la distribution de la taille des sauts. Dans ce cas l'évolution de  $X_t$  peut être décrite par un processus de Poisson composé avec intensité  $\lambda$  et distribution des tailles de sauts  $\nu_0$  :

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t(\lambda)} Y_i \quad Y_i \stackrel{iid}{\sim} \nu_0 \quad (3.5)$$

où  $N_t(\lambda)$  est un processus de poisson composé avec l'intensité  $\lambda$  et la distribution  $\nu_0(\cdot)$ ,  $W_t$  est un mouvement Brownien.

Si la mesure  $\nu$  vérifie  $\int |x| \nu(dx) < \infty$ , on dit que les sauts de  $X$  sont à variation bornée. Dans ce cas, le nombre de sauts dans chaque intervalle de temps peut être infinie mais leur somme doit être convergente avec probabilité 1. Par conséquent, si on note par  $\gamma_0 = \gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu(dx)$  alors  $X_t$  peut être représenté comme une

somme trajectorielle d'un mouvement Brownien et des sauts ; c'est la décomposition de Lévy-Ito :

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma W_t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s \quad (3.6)$$

qui peut être aussi écrite sous la forme intégrale suivante

$$X_t = \gamma_0 t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{R \setminus \{0\}} x J_X(du, dx) \quad (3.7)$$

où  $J_X$  est une mesure aléatoire de Poisson [23], décrivant les sauts de  $X$  :

$$\forall t > 0, \forall A \subset \mathcal{B}(R \setminus \{0\}), \quad J_X([0, t] \times A) = \#\{s \in [0, t], tq. \Delta X_s \in A\} \quad (3.8)$$

On constate que  $E[J_X([0, t] \times A)] = t\nu(A)$ .

Si  $\int |x|\nu(dx) = \infty$  alors les sauts de  $X$  ont une variation finie et les petits sauts doivent être compensés. On définit alors la mesure de Poisson compensée de  $X$  :

$$\tilde{J}_X([0, t] \times A) = J_X([0, t] \times A) - t\nu(A) \quad (3.9)$$

et la trajectoire de  $X$  se décompose comme

$$\forall t \in [0, t] \quad X_t = \gamma_0 t + \sigma W_t + \sum_{0 < s \leq t, |\Delta X_s| \geq 1} \Delta X_s + \int_0^t \int_{|x| < 1} x \tilde{J}_X(du, dx) \quad (3.10)$$

Cette décomposition reste vraie pour les processus de Lévy à variation finie.

On résume dans la définition suivante les différents types des processus de Lévy selon leur triplet de paramètres  $(\gamma, \sigma, \nu)$ .

**Définition 3.2.1.1** *Soit  $X_t$  une processus de Lévy réel de paramètres caractéristiques  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , alors si :*

1.  $\sigma = 0$  et  $\nu(R) < \infty$ ,  $X_t$  est un processus de Poisson composé.
2.  $\sigma = 0$ ,  $\nu(R) = \infty$  et  $\int_{|x| \geq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ ,  $X_t$  est un Lévy d'activité infinie et de variation bornée.
3.  $\sigma > 0$  ou  $\nu(R) = \infty$  et  $\int_{|x| \geq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ ,  $X_t$  est un Lévy de variation non bornée.

Les processus de Lévy font partie des processus de Markov. Le semi-groupe associé à un processus Lévy  $\{X_t\}_t$  est un semi-groupe par rapport à la convolution, de générateur infinitésimal  $L^X$  défini pour tout  $\forall f \in C^2$  et à support compact par

$$\begin{aligned} L^X f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E[f(x + X_t) - f(x)]}{t} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \int \nu(dy) [f(x + y) - f(x) - y 1_{\{|y| \leq 1\}} \frac{\partial f}{\partial x}(x)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Modèles Exponentiels de Lévy : Définition et Exemples

Le modèle exponentielle Lévy  $S_t$  est un modèle d'option à un actif sous-jacent, qui est défini à partir d'un processus de Lévy  $X_t$  de caractéristique  $(\gamma, \sigma, \nu)$ . Sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), il existe une probabilité  $Q$  dite probabilité risque-neutre, sous laquelle les prix actualisés de tous les produits financiers sont des martingales. Dans un modèle exponentielle-Lévy on représente la dynamique de  $S_t$  sous la probabilité risque-neutre comme l'exponentielle d'un processus de Lévy :

$$S_t = e^{rt+X_t} \quad (3.12)$$

$$= S_0 + \int_0^t r S_{u-} du + \sigma \int_0^t S_{u-} dW_u + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1) S_{u-} \tilde{J}_X(du dx) \quad (3.13)$$

où  $r$  est le taux d'intérêt d'un actif non-risqué. Par AOA, il faut que  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t = \exp(X_t)$  soit une martingale, ce qui réduit le nombre de paramètres caractéristiques de  $X_t$  en imposant la relation suivante :

$$\gamma = \gamma(\sigma, \nu) = -\frac{\sigma^2}{2} - \int (e^y - 1 - y1_{|y| \leq 1}) \nu(dy) \quad \text{et} \quad \int_{|y| > 1} \nu(dy) e^y < \infty \quad (3.14)$$

Si on suppose que (3.14) existe et on remplace  $\gamma$  par  $\gamma(\sigma, \nu)$  dans  $L^X$  le générateur infinitésimal de  $X_t$  sera écrit sous la forme suivante :

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) [f(x+y) - f(x) - (e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}] \quad (3.15)$$

Or un processus exponentielle Lévy  $S_t$  est aussi un processus de Markov, son générateur infinitésimal associé  $L^S$  est donné par :

$$L^S f(x) = rx \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \int \nu(dy) [f(xe^y) - f(x) - x(e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x)] \quad (3.16)$$

Grâce à la condition martingale (3.14), on caractérise dans toute la suite un processus Lévy par sa volatilité  $\sigma$  et sa mesure de sauts  $\nu$ .

### 3.2.3 Exemples de processus de Lévy

Plusieurs exemples de processus de Lévy ont été utilisés en finance dans la théorie des options. Les figures (3.1) et (3.2) donnent les trajectoires de deux types de processus à sauts.

Parmi les exemples de Processus de Lévy utilisés en finance figurent notamment :

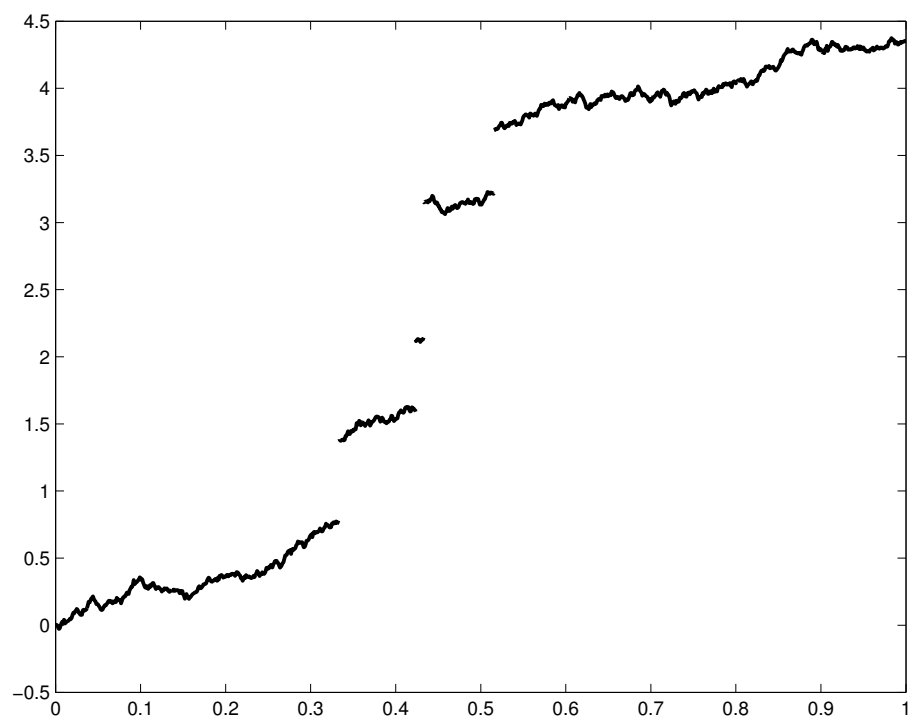


FIG. 3.1 – Trajectoire d'un processus de diffusion avec sauts (modèle de Merton).

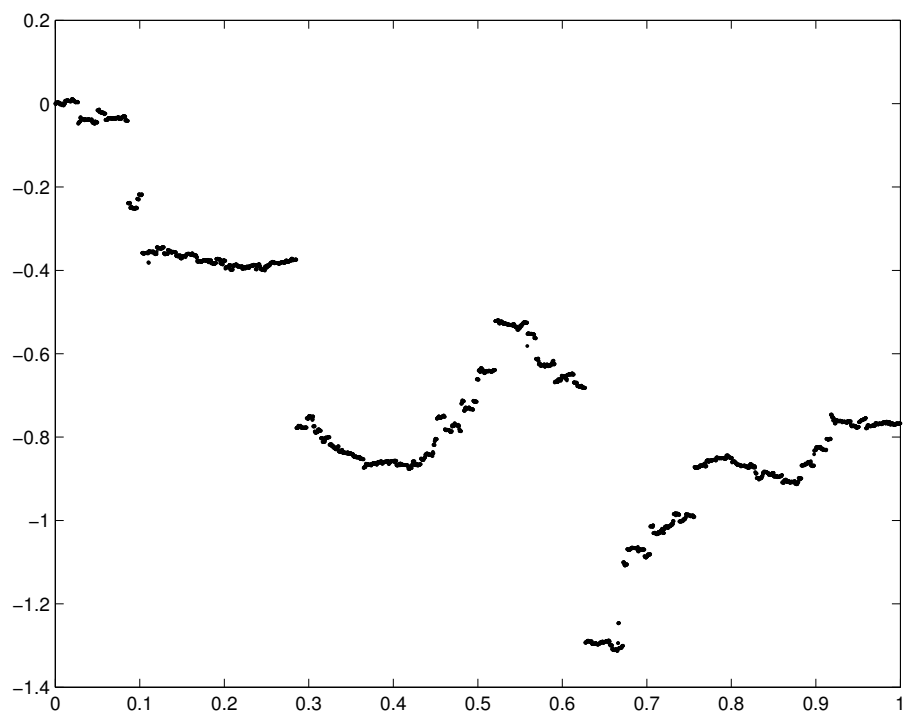


FIG. 3.2 – Trajectoire d'un processus de Lévy à sauts pur (processus stable tempéré).

**Exemple 3.2.3.1 (Modèle de Merton)** *Ce modèle, introduit par Merton en 1976 [53] représente le logarithme du prix comme la somme d'un mouvement Brownien avec dérive et d'un processus de Poisson composé dont la taille des sauts a une distribution gaussienne :*

$$\nu(dx) = \frac{\lambda}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta^2}} dx$$

**Exemple 3.2.3.2 (Modèle de Kou)** *Ce modèle représente le logarithme du prix comme la somme d'un mouvement Brownien avec dérive et d'un processus de Poisson composé dont la taille des sauts a une distribution exponentielle asymétrique [46] (dite de Laplace) :*

$$\nu(dx) = (p\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0} + (1-p)\lambda_- e^{-\lambda_- |x|} 1_{x<0}) dx$$

**Exemple 3.2.3.3 (Modèle Variance Gamma)** *Il s'agit d'un exemple de processus à sauts pur et d'intensité infinie introduit par Madan et Seneta [50]. La mesure de Lévy est donnée par sa densité :*

$$\nu(dx) = \frac{1}{\kappa|x|} e^{Ax-B|x|} \quad \text{avec} \quad A = \frac{\theta}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\frac{\sigma^2}{\kappa}}}{\sigma^2}$$

Nous renvoyons à [23] pour une revue de cette classe de modèles. Remarquons ici que tous ces modèles ont en commun d'avoir une mesure de Lévy qui possède une densité régulière sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Par ailleurs cette densité décroît exponentiellement en  $\pm\infty$ .

**Remarque 3.2.3.1** *Comme dans le cas du modèle de Black-Scholes, on peut donner un modèle plus général aux processus exponentiels de Lévy.*

*Une des généralisations possible est le modèle de sauts à volatilité locale [20] et mesures dépendente; qui peut être mesure stochastique où une mesure déterministe qui dépend du temps et du sous-jacent  $S_t$ . Dans ce cas la dynamique risque-neutre de  $S_t$  est donnée par :*

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \sigma(t, S_{t-}) dW_t + \int (e^z - 1) \tilde{J}_X(dt dz) \quad (3.17)$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_{u-} \sigma(u, S_{u-}) dW_u + \int_0^t \int_R \tilde{J}_X(du dz) S_{u-} (e^z - 1)$$

*$S_t$  reste un processus de Markov dont le générateur infinitésimal s'écrit sous la forme suivante :*

$$L^S f(x, t) = rx \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \int \nu_t(dy) [f(xe^y) - f(x) - x(e^y - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x)]$$

*Dans ce cas le processus  $S_t$  est caractérisé par une fonction positive qui est la surface de volatilité locale et par un processus de mesure  $\nu_t(\cdot)$*



### 3.2.4 Évaluation d'options pour les modèles exponentielle Lévy

Le prix d'une option Européenne dont le sous-jacent suit le modèle exponentielle Lévy  $S_t$  est donné par l'espérance conditionnelle actualisée de son flux terminal  $H(S_T)$  sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ .

$$C(t, S) = E[e^{-r(T-t)} H(S_T) / S_t = S] \quad (3.18)$$

pour les options d'achats  $H(x) = (x - K)_+$  et pour celle de vente  $H(x) = (K - x)_+$  où  $K$  est le prix d'exercice de l'option.

Après l'utilisation du changement des variables logarithmique,  $\tau = T - t$ ,  $x = \ln(\frac{S}{S_0})$  et on note  $h(x) = H(S_0 e^x)$  et  $f(\tau, x) = e^{r\tau} C(t, S_0 e^x)$ . Alors  $f$  est donnée par

$$f(\tau, x) = E[h(x + r\tau + X_\tau)] \quad (3.19)$$

si  $h$  est dans le domaine du générateur infinitésimal  $L^X$  de  $X$ , on pourra en appliquer la formule d'Ito [56] et montrer que  $f$  est solution d'une équation intégral-différentielle.

On donne deux méthodes de calcul de cette espérance conditionnelle lorsque  $S_t$  suit un modèle exponentielle Lévy à savoir par résolution d'équation intégral-différentielle et par transformée de Fourier.

#### Évaluation d'options à partir des équations intégral-différentielles

On commence par écrire le prix  $C(t, S)$  comme solution d'une équation intégral-différentielle similaire à l'équation de Black&Scholes (1.1) avec un terme intégral due à la présence du terme saut dans la dynamique du sous-jacent  $S_t$ .

Dans [27], les auteurs ont montré différents résultats de régularité pour la solution, que l'on résume dans la proposition suivante :

**Proposition 3.2.4.1** *Soit  $C(t, S)$  solution de :*

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} - r C(t, S) \\ \quad = \int \nu(ds) \{C(t, S e^s) - C(t, S) - S(e^s - 1) \frac{\partial C}{\partial S}\} \\ C(T, S) = (S - K)_+ \end{cases} \quad (3.20)$$

alors ;

1.  $C(t, S) = e^{-(r-q)(T-t)} E[(S_T - K)_+ / S_t = S]$  ; la solution du système donne le prix d'une option d'achat Européenne.

2. Pour  $\sigma > 0$  et  $\nu(\cdot)$  qui vérifie

$$\exists \beta \in (0, 2), \liminf_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{2-\beta}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |y|^2 \nu(dy) > 0 \quad \text{et} \quad \int_{|y|>1} e^{2y} \nu(dy) < \infty \quad (3.21)$$

alors  $C(\cdot, \cdot) \in C([0, T] \times [0, \infty)) \cap C^\infty([0, T] \times (0, \infty))$ .

Ce type d'équation intégral-différentielle peut être généralisé à une classe plus généraux de modèles donnée par (3.17). On peut montrer que le prix d'une option call européenne dont le sous-jacent suit (3.17) est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}(t, S) S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} - r C(t, S) \\ \qquad \qquad \qquad = \int \nu_t(ds) \{ C(t, Se^s) - C(t, S) - S(e^s - 1) \frac{\partial C}{\partial S} \} \\ C(T, S) = (S - K)_+ \end{array} \right. \quad (3.22)$$

De la même façon, on montre que le prix d'une option barrière dont le sous-jacent suit le modèle exponentielle Lévy est solution d'une équation intégral-différentiel. Par exemple pour un Call up-and-out (avec barrière désactivante) de maturité  $T$ , prix d'exercice  $K$  et de barrière supérieure  $U > S_0$  le payoff est donné par  $H(S_T) = (S_T - K)_+ 1_{T < \theta}$  où  $\theta = \inf \{t \geq 0 | S_t \geq U\}$ ; c'est le premier point de sortie. Le prix de l'option est ainsi donné par l'espérance actualisée du payoff

$$C_b(t, S) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)_+ 1_{T < \theta_t} / S_t = S]$$

et à partir de cette expression les auteurs de [27] montrent que la valeur de cette option barrière est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + r S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \int \nu(ds) \{ C(t, Se^s) - C(t, S) - S(e^s - 1) \frac{\partial C}{\partial S} \} \\ C(T, S) = (S_T - K)_+ \\ C(t, S) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} S < U \\ S \geq U \end{array} \quad (3.23)$$

Des algorithmes efficaces à base de différences finies [28] et d'éléments finie [51] ont été proposés pour la résolution numérique de ces équations intégral-différentielles. Nous les reverrons dans le chapitre 5.

La deuxième méthode utilisée pour l'évaluation d'option européenne dont le sous-jacent suit un modèle exponentielle Lévy est la méthode de transformée de Fourier, cette méthode était utilisée dans la thèse de Tankov [62]. Pour plus de détails sur cette méthode voir [50]

### 3.2.5 Équation Forward

L'équation backward ci-dessus permet d'évaluer option (par exemple un call de maturité et prix d'exercice donnés) en fonction du temps et de la valeur du sous-jacent. Pour la calibration d'un modèle, on dispose des prix d'options pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercices  $K$  à un instant fixe  $t_0$  et pour une valeur de sous-jacent  $S_{t_0}$ . Le calcul de ces prix par la résolution de l'équation backward est donc fastidieux, nécessitant une résolution par option. Il est alors plus avantageux d'utiliser une autre équation qui permet en une seule opération de calculer les prix de toutes ces options : c'est l'équation forward, introduite par Dupire [34], que nous étendons ici au cas des processus de Lévy puis des processus Markoviens avec sauts :

**Proposition 3.2.5.1** *Considérons un marché où la dynamique risque-neutre du sous-jacent  $S_t$  est donnée par*

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = (r - q)dt + \sigma(t, S_{t-})dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)\tilde{J}_X(dx, dt)$$

où  $J_X$  désigne une mesure de Poisson compensée de mesure de Lévy  $\nu$ . On suppose que

$$\int e^{2y}\nu(dy) < \infty \text{ et } \sigma(.,.) \leq \lambda \quad (3.24)$$

ce qui implique que  $S$  est un martingale de carré intégrable :

$$\sup_{t \in [0, T]} E[|S_t|^2] < \infty$$

Soient  $t_0$  et  $S_{t_0}$  fixes,  $C(t_0, S_{t_0}; T, K)$  le prix d'une option call européenne de prix d'exercice  $K$  et maturité  $T$  vue à l'instant  $t_0$ . Alors  $C(T, K)$  est solution d'une EDPI forward qui s'écrit sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial T} = -(r - q)K \frac{\partial C}{\partial K} - qC(T, K) + \frac{\sigma^2(T, K)}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \\ \quad + \int \nu(ds) e^s \{ C(T, Ke^{-s}) - C(T, K) + K(1 - e^{-s}) \frac{\partial C}{\partial K} \} \\ C(t_0, K) = (S_{t_0} - K)_+ \end{array} \right. \quad (3.25)$$

**Démonstration** Puisque  $f(x) = (x - K)_+$  est une fonction convexe, on peut appliquer la formule de Meyer-Itô [56, Theorem 70, p. 214] : pour  $f$  convexe et  $X_t$  une semi-martingale alors

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^t f'(X_{s-})dX_s + \sum_{0 < s \leq t} \{ f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s \}$$

$$+\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(dx) L(t, x)$$

où

$$\mu = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

est une mesure positive qui peut être interprétée comme la dérivée seconde de  $f$  et  $L(t, x)$  est le *temps local* associé à la semi-martingale  $X_t$  au point  $x$ . On applique cette formule à  $S_t$  alors on a

$$\begin{aligned} d(S_t - K)_+ &= 1_{(S_{t-} \geq K)} dS_t + \{(S_{t-} + \Delta S_t - K)_+ - (S_{t-} - K)_+ - 1_{(S_{t-} \geq K)} \Delta S_t\} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(dx) dL(t, x) \end{aligned}$$

où  $\mu$  est la mesure positive associée à la fonction convexe  $(x - K)_+$  qui est donnée par  $\mu(dx) = \frac{\partial^2}{\partial K^2} (x - K)_+ = \delta_K(dx)$  et  $L(t, x)$  est le temps local associé à la semi-martingale  $S_t$  pris au point  $x$ . Ce dernier vérifie la formule de temps d'occupation [56, Corollary 1, p. 216] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(t, x) g(x) dx = \int_0^t g(S_{u-}) d[S, S]_u^c = \int_0^t g(S_{u-}) \sigma^2(t, S_{t-}) S_{u-}^2 du \quad (3.26)$$

Dérivons d'abord un lemme qui sera utile dans la suite :

**Lemme 3.2.1** *Notons  $q_t(u, K)$  la valeur en  $K$  de la densité conditionnelle de  $S_u$  sachant  $\mathcal{F}_t$ . Alors*

$$E[L(u, K) | \mathcal{F}_t] = \int_t^u q_t(v, K) \sigma^2(v, K) K^2 dv \quad (3.27)$$

La fonction  $u \mapsto E_t[L(u, K)]$  admet pour dérivée

$$\frac{\partial}{\partial u} E[L(u, K) | \mathcal{F}_t] = q_t(u, K) \sigma^2(u, K) K^2 \quad (3.28)$$

**Démonstration du lemme** Nous suivons [37, Th. 4.5.1.].

On prend l'espérance conditionnelle de l'égalité (3.26), on obtient

$$E\left(\int_0^u g(S_{v-}) \sigma^2(v, S_{v-}) S_{v-}^2 dv \middle| \mathcal{F}_t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) E(L(u, x) | \mathcal{F}_t) dx$$

$q_t(v, K)$  est la densité de  $S_t$  donne

$$E[L(u, K) | \mathcal{F}_t] = \int_t^u q_t(v, K) \sigma^2(v, K) K^2 dv \quad (3.29)$$

si on dérive cette égalité par rapport à  $u$ , alors :

$$\frac{\partial}{\partial u} E_t[L(u, K)|\mathcal{F}_t] = q_t(u, K)\sigma^2(u, K)K^2 \quad (3.30)$$

En approchant la masse de Dirac  $\delta_K(\cdot)$  par une suite de fonctions régulières  $g_\epsilon(u) = (\epsilon\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(x - K)^2/2\epsilon^2)$  on peut en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(t, x)\delta_K(dx) = \int_0^t \delta_K(S_{u-})d[S, S]_u^c = \int_0^t \delta_K(S_{u-})\sigma^2(u, S_{u-})K^2 du$$

Or

$$\begin{aligned} & (S_{t-} + \Delta S_t - K)_+ - (S_{t-} - K)_+ - 1_{(S_{t-} \geq K)} \Delta S_t \\ &= (S_{t-} e^{\Delta X_t} - K)_+ - (S_{t-} - K)_+ - S_{t-} 1_{(S_{t-} \geq K)} (e^{\Delta X_t} - 1) \end{aligned}$$

donc  $(S_t - K)_+ = (S_0 - K)_+ + A(t) + M_t$  avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t (r - q) S_{u-} 1_{(S_{u-} \geq K)} + \frac{1}{2} \int_0^t \delta_K(S_{u-}) \sigma^2(u, S_{u-}) K^2 du \\ &+ \int_0^t du \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dx) \{ (S_{u-} e^x - K)_+ - (S_{u-} - K)_+ - 1_{(S_{u-} \geq K)} S_{u-} (e^x - 1) \} \end{aligned}$$

et

$$dM_t = 1_{(S_{t-} \geq K)} S_{t-} \sigma dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} [(S_{t-} e^x - K)_+ - (S_{t-} - K)_+] \tilde{J}_X(dx, dt)$$

En utilisant la condition (3.24) et la propriété de Lipschitz de la fonction payoff on peut montrer en suivant les lignes de [23, Chap. 12] que  $M_t$  est une martingale de carré intégrable. On en déduit que

$$(S_T - K)_+ = (S_t - K)_+ + A(T) - A(t) + M_T - M_t$$

ce qui donne

$$E_t(S_T - K)_+ = (S_t - K)_+ + E_t[A(T) - A(t)]$$

puisque  $M_t$  est une martingale. On conclut alors que

$$e^{r(T-t)} C(t, S_t; T, K) = E_t(S_T - K)_+ = (S_t - K)_+ + E_t[A(T) - A(t)]$$

Calculons ce dernier terme pour  $T \geq t$  :

$$\begin{aligned} E_t[A(T) - A(t)] &= \int_t^T du (r - q) E_t(S_{u-} 1_{(S_{u-} \geq K)}) + \frac{1}{2} \int_t^T du E_t[L(u, K)] \\ &+ \int_t^T du \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dx) \{ E_t(S_{u-} e^x - K)_+ - E_t(S_{u-} - K)_+ - E_t(1_{(S_{u-} \geq K)} S_{u-}) (e^x - 1) \} \end{aligned}$$

Or  $\forall u \geq t$

$$C(t, S_t; u, K)e^{r(u-t)} = E_t[1_{S_u > K} S_u] + Ke^{r(u-t)} C_K(t, S_t; u, K)$$

D'après la formule de Breeden-Litzenberger [17],

$$e^{r(u-t)} C_{KK}(t, S_t; u, K) = q(t, S, u, K)$$

où  $q(t, S, u, K)$  est la densité conditionnelle de  $S_u$  en  $K$ , donc en appliquant le lemme 3.2.1 nous concluons que  $\forall u \geq t$

$$\begin{aligned} E_t\left[\int_t^T L(u, K) du\right] &= \int_t^T E_t[L(u, K)] du \\ &= \int_t^T e^{r(u-t)} C_{KK}(t, S_t; u, K) du \end{aligned} \quad (3.31)$$

donc

$$\begin{aligned} E_t[A(T) - A(t)] &= \int_t^T (r - q)e^{r(u-t)} (C(t, S_t; u, K) - KC_K(t, S_t; u, K)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^T du \sigma^2(u, K) K^2 e^{r(u-t)} C_{KK}(t, S_t; u, K) \\ &+ \int_t^T du \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dx) \{E_t(S_{u-} e^x - K)_+ - E_t(S_{u-} - K)_+ - E_t(1_{(S_{u-} \geq K)} S_{u-})(e^x - 1)\} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} E_t(S_u e^x - K)_+ &= e^{r(u-t)} e^x C(u, Ke^{-x}) \\ E_t(S_u - K)_+ &= e^{r(u-t)} C(u, K) \\ E_t(1_{(S_u \geq K)} S_u) &= e^{r(u-t)} (C(u, K) - KC_K(u, K)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} e^{r(T-t)} C(t, S_t; T, K) - (S_t - K)_+ &= E_t[A(T) - A(t)] = \\ &= \int_t^T (r - q)e^{r(u-t)} (C(t, S_t; u, K) - KC_K(t, S_t; u, K)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^T du \sigma^2(u, K) K^2 e^{r(u-t)} C_{KK}(t, S_t; u, K) \\ &+ \int_0^T e^{r(u-t)} du \int_{-\infty}^{\infty} \nu(dx) \{C(u, Ke^{-x}) - C(u, K) + (1 - e^x)(C(u, K) - KC_K(u, K))\} \end{aligned}$$

Cette égalité est valable  $\mathcal{Q}$ -presque-sûrement, donc sur tout le support de  $S_t$  c'est-à-dire  $[t, T_{\max}] \times ]0, \infty[$ . En dérivant chaque coté par rapport à  $T$  nous obtenons après simplification par  $e^{r(T-t)}$  :

$$\begin{cases} C_T &= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 C_{KK} - (r - q) KC_K(T, K) - qC(T, K) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \nu(dx) \{C(T, Ke^{-x}) - C(T, K) + (1 - e^x) KC_K\} \\ C(t_0, K) &= (S_{t_0} - K)_+ \end{cases}$$

égalité qui est donc également valable sur  $[t, T_{\max}] \times ]0, \infty[$ . **Fin de démonstration.**

**Remarque 3.2.5.1** Une autre démonstration basée sur l'homogénéité des prix d'options et l'identité d'Euler est proposée par Carr et Hirsu [21]. D'après la première équation de pricing (3.20), si on suppose que  $C(T, K)$  est deux fois différentiable en  $T$  et  $K$  et on note par  $\tau = T - t$ , puisque le prix d'une option est linéairement homogène de  $S$  et  $K$ , c'est à dire  $C(\lambda S, \lambda K) = \lambda C(S, K) \forall \lambda \geq 0$ , par suite grâce à la formule d'Euler on a :

$$C(S, K) = S \frac{\partial C}{\partial S}(S, K) + K \frac{\partial C}{\partial K}(S, K) \quad \forall S, K$$

équivalent à

$$S \frac{\partial C}{\partial S}(S, K) = C(S, K) - K \frac{\partial C}{\partial K}(S, K)$$

et on dérive une deuxième fois, on a :

$$S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, K) = K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(S, K)$$

Ce qui nous permet de passer de l'équation vérifiée par le prix d'une option de maturité  $T$  et de strike  $K$  à l'équation qui donne les prix de toutes les options pour une unique condition initiale  $t$  et  $S$ .

Cette équation s'obtient en remplaçant les dérivées en  $S$  et  $t$  par leurs équivalence des dérivées de  $K$  et  $T$  en utilisant l'homogénéité par rapport à  $S, K$ . Cette deuxième méthode plus simple n'est pas toujours applicable : elle suppose la différentiabilité des prix d'option. En effet, si  $\sigma = 0$ , le prix  $C(S, K)$  n'est pas forcément dérivable en  $S$  : des contre-exemples sont donnés dans [28].

Enfin, une troisième démonstration de ce résultat, utilisant la méthode des flots stochastiques, a été proposée récemment par Jourdain [45], dans le cas d'un modèle de diffusion avec sauts dont la composante brownienne est non-dégénérée.

Contrairement aux résultats de [21, 45], la démonstration reste valable pour un cas plus général de processus Markovien à sauts notamment dans le cas où les caractéristiques des sauts dépendent du prix  $\nu(t, S_t, x)dx$  et où la partie brownienne peut être nulle.

Dans la suite de ce chapitre, pour simplifier le calcul on va travailler avec des processus exponentiels de Lévy, c'est à dire qu'on prend  $\sigma$  une constante positive.

## Changement de variable logarithmique

On dispose alors de deux équations adjointes, une de type backward qui donne le prix d'une option call européen de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  à tout moment d'évaluation  $t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial C}{\partial S} - r C(t, S) \\ C(T, S) = (S - K)_+ \end{array} \right. = \int \nu(ds) \{ C(t, Se^s) - C(t, S) - S(e^s - 1) \frac{\partial C}{\partial S} \}$$

et d'une équation forward qui est une équation de Dupire avec sauts, qui donne les prix de tous les calls pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercices à un instant donné  $t$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial T} = -K \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{\sigma^2}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \\ C(t, K) = (S_t - K)_+ \end{array} \right. + \int \nu(ds) e^s \{ C(T, Ke^{-s}) - C(T, K) + K(1 - e^{-s}) \frac{\partial C}{\partial K} \} \quad (3.32)$$

On effectue le changement de variable logarithmique suivant pour les deux équations

$$x = \ln(K) \quad \xi = \ln(S) \quad \text{et} \quad u(t, \xi; T, x) = C(t, S_t, T, K) \quad (3.33)$$

donc pour  $T$  et  $x$  fixe,  $u(t, \xi, T, x)$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} \\ = \int \nu(dy) \{ u(t, x + y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x} \} \\ u(T, \xi, T, x) = (e^\xi - e^x)_+ \end{array} \right.$$

et pour  $\xi$  et  $t$  fixe,  $u(t, \xi, T, x)$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \int \nu(dy) e^y \{ u(\tau, x - y) - u(\tau, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \} \\ u(t, \xi, t, x) = (e^\xi - e^x)_+ \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Dans tout la suite de ce travail, on prend  $t = 0$ ,  $S_0 = 1$  ce qui est équivalent à dire que  $\xi = 0$  et on notera par  $u(T, x) = u(0, 0, T, x)$ , donc on s'occupe de la résolution du système (3.34) qui forme le problème direct de la calibration où le *pricing* des options européennes à un instant  $t = 0$  fixe et pour toute maturité  $T$  et log prix d'exercice  $K$ .





# Chapitre 4

## Problème inverse et régularisation de Tikhonov

La première étape de calibration est la même pour les modèles exponentiels de Lévy que dans le cas de diffusion étudié dans le chapitre 2, puisque le choix du modèle est la deuxième étape de la calibration (après qu'on dispose des observations sur le marché). On dispose alors d'un nombre fini d'observations

$$(C_M(T_i, K_i))_{i \in \mathcal{I}} \equiv (u_M(T_i, x_i))_{i \in \mathcal{I}} \in R_+^{\mathcal{I}}$$

où  $C_M(T_i, K_i)$  sont les valeurs d'options calls européennes pour des différentes maturités  $T_i$  et prix d'exercices  $K_i$  qui sont équivalents à  $u_M(T_i, x_i)$  après avoir effectué le changement de variable introduit dans le chapitre 3.

On cherche un processus de Lévy  $X_t$ , caractérisé par un triplet de paramètre  $(\gamma, \sigma, \nu)$  qui peut être réduit grâce à la condition de martingale (3.14) à un couple de paramètres  $(\sigma, \nu)$  tel que

$$C(t, S; T_i, K_i; \sigma, \nu) = e^{-r(T_i - t)} E[(S_{T_i} - K_i)_+ | S_t = S] \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (4.1)$$

où  $S_t = e^{rt + X_t}$  est le modèle exponentielle Lévy dont la dynamique sous la probabilité risque neutre est donnée par

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = rS_{t-}dt + \sigma dW_t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1) \tilde{J}_X(du dx) \quad (4.2)$$

Dans le chapitre 3, on a montré que pour  $t$  et  $S$  fixe, le prix d'un cal Européen  $C(t, S; T, K, \sigma, \nu(dx))$  dont le sous-jacent suit le modèle exponentiel de Lévy 4.2 est solution de l'équation intégral-différentielle (3.25) prise au point  $(T_i, K_i)$ . En utilisant le changement de variable logarithmique effectué dans le chapitre précédent, on peut écrire le problème exact de calibration sous la forme d'une question d'estimation des paramètres  $(\sigma, \nu)$  du processus de Lévy  $X_t$  qui sont les coefficients de l'équation intégral-différentielle linéaire (3.34).

## 4.1 Formulation du problème

Nous avons vu au chapitre précédent que le problème direct d'évaluation des options européennes à un instant  $t$  pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercices  $K$  est donné par une équation integrodifférentielle (3.34). On peut alors formuler le problème de calibration sous la forme du problème inverse associé à (3.34) :

Chercher des paramètres caractéristiques  $(\sigma^*, \nu^*)$  d'un processus de Lévy  $X_t$ , tel que

$$u(T_i, x_i; \sigma^*, \nu^*) = u_M(T_i, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

où  $u(T, x; \sigma, \nu)$  est solution de l'équation (3.34) qui donne les prix des options européennes d'achat pour différents prix d'exercices et maturités (après changement de variables).

### 4.1.1 Espaces de mesures

1. On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des mesures de Lévy ;

$$\mathcal{L} = \{ \nu \text{ mesure positive sur } R_- \setminus \{0\}; \int \nu(dy)(y^2 \wedge 1) < \infty, \int_1^\infty e^y \nu(dy) < \infty \}$$

et par  $\overline{\mathcal{L}} = ]0, \sigma_{max}[ \times \mathcal{L}$  l'ensemble des couples caractéristiques d'un processus de Lévy avec une condition d'intégrabilité à l'infini correspondant aux modèles exponentielle-Lévy.

2. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des mesures de Lévy discrètes.  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble convexe de l'ensemble de  $\mathcal{L}$  utilisé dans le papier [24] pour la calibration des modèles exponentiels de Lévy, soit

$$\mathcal{E} = \{ \nu \in \mathcal{L}; \nu(dy) = \sum a_i \delta_{y_i} \text{ avec } a_i \geq 0, y_i \in R \}$$

et par  $\overline{\mathcal{E}} = ]0, \sigma_{max}[ \times \mathcal{E}$ .

Cet ensemble n'a pas de structure naturelle hilbertienne, mais c'est un espace  $L^1$  à poids. Ce cadre n'est pas convenable pour l'étude des propriétés du problème inverse.

3. On note

$$\mathcal{H} = \{ \nu \in \mathcal{L}; \nu(dy) = h^2(y)dy \}$$

l'ensemble des mesures de Lévy à densité et  $\overline{\mathcal{H}} = ]0, \sigma_{max}[ \times \mathcal{H}$ .

4. On note

$$\mathcal{D} = \{ h : R \longrightarrow R^+ ; h^2(y)dy \in \mathcal{H} \} \subset L^2(1 \wedge y^2 \cdot dy)$$

et  $\overline{\mathcal{D}} = ]0, \sigma_{\max}[ \times \mathcal{D}$ .

$\overline{\mathcal{D}}$  est un convexe (en fait un demi-espace) de l'espace de Hilbert  $R \times L^2(1 \wedge y^2 \cdot dy)$  muni de la norme suivante :

$$\|(\sigma, h)\|_{\overline{\mathcal{D}}}^2 = |\sigma|^2 + \int_R h^2(y) (1 \wedge y^2) dy$$

5.  $\mathcal{D}_1$  le sous espace de  $\mathcal{D}$  tel que  $\nu_h = h^2(y)dy$  définit un processus de Lévy à variation finie :

$$\mathcal{D}_1 = \{h \in \mathcal{D}, \int_{-1}^1 |y| h^2(y) dy < \infty\}$$

Et on note par  $\overline{\mathcal{D}_1} = ]0, \sigma_{\max}[ \times \mathcal{D}_1$ .

$\mathcal{D}_1$  caractérise l'ensemble des processus de Lévy dont la volatilité est bornée par  $\sigma_{\max}$ , dont les sauts sont de variation finie et dont la mesure de Lévy a une densité.

**Remarque 4.1.1.1** 1. Dans [24], les auteurs montrent que  $\mathcal{E}$  est faiblement dense dans  $\mathcal{L}$ , c'est à dire : pour toute mesure de Lévy  $\nu \in \mathcal{L}$ , il existe une suite de mesures  $\nu_n \in \mathcal{E}$  qui converge faiblement vers la mesure  $\nu$  :  $\nu_n \rightharpoonup \nu$ . En effet, soit  $\nu \in \mathcal{L}$  une mesure associée à un processus de Lévy  $X_t$ , si on prend la suite des mesures

$$\nu_n(dx) = \sum_{k=1}^{2n} \delta_{x_k}(dx) \frac{\nu([x_k - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_k + \frac{1}{\sqrt{n}}])}{1 \wedge x_k^2}$$

avec  $x_k = \frac{2(k-n)-1}{\sqrt{n}}$ . Alors

$$\forall f \in C_b^2 \quad \int f(x) \nu_n(dx) \longrightarrow \int f(x) \nu(dx)$$

2. L'ensemble des mesures de Lévy correspondant à des sauts de variation finie est dense dans l'ensemble de toutes les mesures de Lévy  $\mathcal{L}$ .

En effet, si on prend une mesure de Lévy  $\nu \in \mathcal{L}$  et on note par  $\nu_n$  la suite de mesure définie par  $\nu_n(dy) = \nu(dy)(1 - 1_{[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]})$  qui est une mesure à variation finie, elle vérifie

$$\forall f \in C_b^2 \quad \int f(y) \nu_n(dy) \longrightarrow \int f(y) \nu(dy)$$

**Proposition 4.1.1.1**

L'ensemble des mesures de Lévy à densité  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{L}$  pour la topologie faible ;

$$\forall \nu \in \mathcal{L}, \quad \exists \{\nu_{n,\varepsilon}\}_{n,\varepsilon} \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad \int f(y) \nu_{n,\varepsilon}(dy) \xrightarrow{n,\varepsilon} \int f(y) \nu(dy) \quad \forall f \in C_b^2$$

### Démonstration 4.1.1

Pour une mesure de Lévy  $\nu \in \mathcal{L}$ , d'après la remarque (4.1.1.1)

$$\exists \nu_n = \sum_{i=1}^{2n} a_i \delta_{y_i} \in \mathcal{E} \text{ tel que } \int f(y) \nu_n(dy) \longrightarrow \int f(y) \nu(dy) \quad \forall f \in C_b^2$$

et si on prend  $g_\varepsilon^{y_i}(y) = \frac{e^{-\frac{(y-y_i)^2}{2\varepsilon^2}}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{H}$  pour  $y_i \in R$  alors

$$\int f(y) g_\varepsilon^{y_i}(y) dy \longrightarrow \int f(y) \delta_{y_i}(dy) = f(y_i) \quad \forall f \in C_b^2$$

par suite pour  $\nu \in \mathcal{L}$  on prend

$$g_{\varepsilon,n}(y) = \sum_{i=1}^{2n} a_i g_\varepsilon^{y_i}(y)$$

qui vérifie

$$\int f(y) g_{\varepsilon,n}(y) dy \longrightarrow \int f(y) \nu(dy) \quad \forall f \in C_b^2$$

Ce qui montre que  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{L}$ .

Pour ramener le problème inverse dans un cadre hilbertien et tenant compte de la proposition (4.1.1.1), nous choisissons donc de paramétrer les mesures de Lévy par la racine carrée de leur densité et travailler dans l'espace  $\overline{\mathcal{D}}_1$  : on va donc regarder le prix  $u(\sigma, \nu)$  donné par l'équation (3.34) comme une fonctionnelle défini sur  $\overline{\mathcal{D}}_1$ . On définit pour  $(T, x) \in \mathcal{Q}$  la fonction  $u^{T,x}$  de la façon suivante :

$$u^{T,x} : \overline{\mathcal{D}}_1 \longrightarrow R_+$$

$$(\sigma, h) \longrightarrow u(\sigma, h) \tag{4.3}$$

solution de (3.34) avec une volatilité  $\sigma$  et  $h^2(y)dy$  comme mesure de Lévy. On va étudier cette fonction  $u$  dans la section qui suit.

### 4.1.2 Un problème inverse mal posé

On ramène alors le problème initial de calibration sur tout processus de Lévy (4.1) à une question d'estimation de paramètres dans un convexe Hilbertien  $\overline{\mathcal{D}}_1$  des coefficients d'une équation intégral-différentielle à partir de sa solution en un nombre fini de point  $\{(T_i, x_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ .

La formulation mathématique de la calibration d'un nombre fini d'observations de

prix d'options  $\{u_M(T_i, x_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  sur les modèles exponentiels Lévy dont les paramètres sont dans  $\overline{\mathcal{D}}_1$  s'écrit sous la forme suivante :

$$Chercher(\sigma^*, h^*) \in \overline{\mathcal{D}}_1 \text{ tel que}$$

$$u(T_i, x_i; \sigma^*, h^*) = u_M(T_i, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (4.4)$$

qui peut être écrit sous la forme d'un problème inverse standard, à savoir :

$$Chercher (\sigma^*, h^*) \in \overline{\mathcal{D}}_1 \text{ tel que } F(\sigma^*, h^*) = Y \quad (4.5)$$

où  $F$  est une fonction vectorielle dont les composantes sont des fonctions  $u$ , définies de la façon suivante ;

$$F : \overline{\mathcal{D}}_1 \longrightarrow R_+^{\mathcal{I}}$$

$$(\sigma, h) \longrightarrow F(\sigma, h) = (u(T_i, x_i; \sigma, h))_{i \in \mathcal{I}}$$

$Y$  un vecteur de  $R_+^{\mathcal{I}}$ , où  $\mathcal{I}$  est de cardinal le nombre d'observations qu'on dispose, qui donne les observations du marché

$$\text{Pour } i \in \mathcal{I} \quad Y_i = u_M(T_i, x_i)$$

et  $u(., .; \sigma, h)$  est solution du problème de Cauchy integrodifférentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \\ \quad + \int_R e^y h^2(y) dy \{ u(t, x - y) - u(t, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial y} \} \\ u(0, x) = (1 - e^x)_+ \end{array} \right.$$

On remarque que la fonction  $F$  est une fonction vectorielle de dimension finie (nombre d'observations) dont les composantes sont des fonctions  $u$ . Par suite,  $F$  a les mêmes propriétés et caractéristiques que la fonction  $u$ . Pour cela dans le reste, lorsque on aura besoin de prouver des propriétés de  $F$ , continuité, dérivabilité..., on les montrera que pour la fonction  $u$  et restent vraies pour la fonction  $F$ .

On va étudier dans la suite de ce chapitre le problème inverse (4.5) et on essaye dans le chapitre suivant de donner une résolution numérique de la même question.

**Définition 4.1.2.1** *Un problème inverse de type (4.5) est dit bien posé s'il satisfait les trois propriétés suivantes :*

1. (Existence de la solution)  $F(\sigma, h) \equiv (u(T_i, x_i; \sigma, h))_{i \in \mathcal{I}} = Y$  admet une solution  $\forall Y \in R_+^{\mathcal{I}}$  ; c'est à dire

$$\forall Y \in R_+^{\mathcal{I}} \quad \exists (\sigma^*, h^*) \in \overline{\mathcal{D}}_1 \text{ tel que } F(\sigma^*, h^*) = Y \quad (4.6)$$

2. (Unicité de la solution) Cette solution est unique. C'est à dire :  $(\sigma^*, h^*)$  définie en (4.6) est unique.

3. (Stabilité de la solution par rapport aux observations) Cette solution dépend d'une manière continue de  $Y$  ; c'est à dire si  $Y^\delta \in R_+^T$  telle que  $\|Y^\delta - Y\|_{R^T} \leq \delta$  alors  $(\sigma_\delta^*, h_\delta^*) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  solution de (4.5) après qu'on remplace  $Y$  par  $Y^\delta$  satisfait à

$$\|(\sigma_\delta^*, h_\delta^*) - (\sigma^*, h^*)\|_{\bar{\mathcal{D}}_1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (4.7)$$

Alors que les deux premières propriétés sont plutôt d'un intérêt théorique et peuvent se traiter en pratique en généralisant la notion de solution (ex : solution moindres carrés, régularisation[39, 63]), la troisième propriété de la définition (4.1.2.1) est la plus importante dans les applications car en pratique les données de prix sont observées à une fourchette vente-achat près donc comportent une incertitude a priori. La propriété (4.7) garantit que si on dispose de deux jeux d'observations proches alors les paramètres solutions de (4.5) sont proches. C'est cette propriété qui s'avère mise en défaut par les solutions simples (moindres carrés, augmentation du nombre de paramètres). En effet, Cont et Tankov [24] ont montré que le problème (4.5) est mal posé à la fois dans sa version exacte et moindres carrés :

- L'existence d'une solution n'est pas évidente : les modèles exponentielle-Lévy imposent une structure par terme rigide aux volatilités implicites des options, qui ne correspond pas tout à fait à celle observée dans les données du marché.
- Dans les cas tests où les prix sont générés par un modèle exponentielle-Lévy, la solution peut ne pas être unique : on peut trouver d'autres modèles qui donnent les mêmes prix aux points d'observation. Ce problème d'identifiabilité est discuté dans [24].
- Comme nous allons montrer dans la section suivante, la solution du problème direct est un opérateur compact, ce qui implique que son inverse est instable en fonction des observations  $u_M \equiv Y$  ; comme en général le vecteur d'observations est connu avec un bruit  $\delta$  (dans le cas d'observations des prix d'options  $\delta$  représente la fourchette bid-ask), cette instabilité rend problématique l'interprétation du résultat de calibration.

Pour s'assurer d'avoir au moins, une estimation des paramètres  $((\sigma^*)^n, (\nu^*)^n)$  de  $(\sigma^*, \nu^*) \in \mathcal{L}$  on peut chercher les paramètres qui nous donnent les prix calculés à partir de (3.34) les plus proches des observations au sens quadratiques ; c'est à dire résoudre le problème d'optimisation

$$(\sigma_n^*, \nu_n^*) = \operatorname{arginf} \sum_{i=1}^n |u^{\sigma, \nu}(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)|^2 = \operatorname{arginf} \|F(\sigma, \nu) - Y\|_{R^n} \quad (4.8)$$

On note par

$$M = \{(\sigma^*, h^*) \in \bar{\mathcal{D}}_1 \text{ tel que } \|F(\sigma^*, h^*) - Y\| \leq \|F(\sigma, h) - Y\| \ \forall (\sigma, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1\}$$

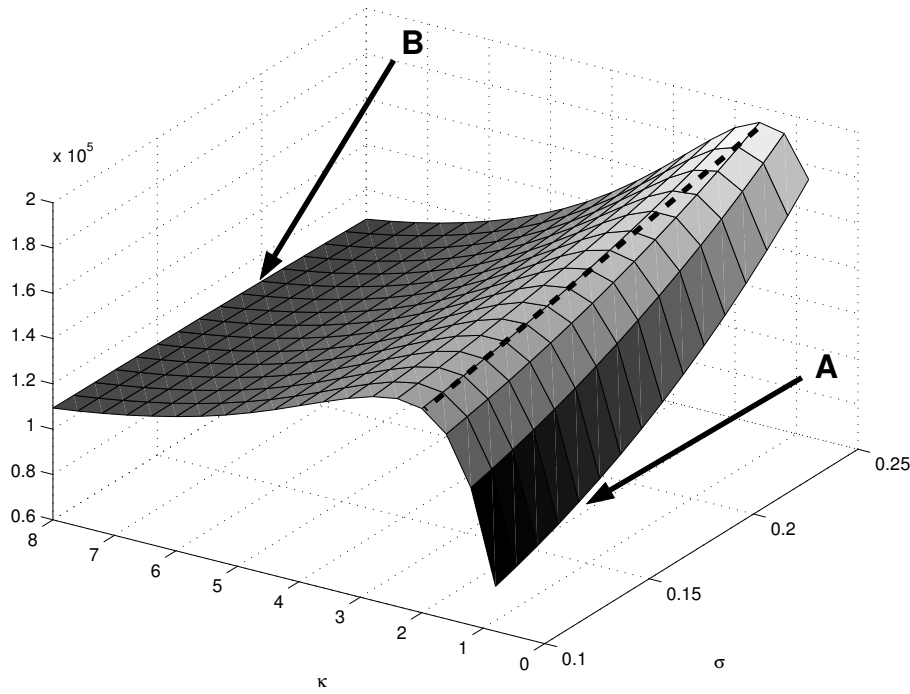


FIG. 4.1 – Surface d’erreur quadratique pour un modèle Variance Gamma avec deux paramètres libres. Notons le manque de convexité et les multiples minimas.

l’ensemble des solutions du problème au sens des moindres carrés dans  $\bar{\mathcal{D}}_1$  et pour  $(\bar{\sigma}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ , on note par

$$M_{(\bar{\sigma}, \bar{h})} = \{(\sigma^*, h^*) \in M \text{ tel que } \|(\sigma^*, h^*) - (\bar{\sigma}, \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1} \leq \|(\sigma^*, h^*) - (\bar{\sigma}, \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1} \quad \forall (\sigma, h) \in M\}$$

l’ensemble des solutions moindres carrés de (4.8) les plus proches de  $(\bar{\sigma}, \bar{h})$ .

Avec cette méthode (4.8), on s’assure de l’existence des paramètres, mais le problème est toujours mal-posé; en effet :

- Comme on voit sur la figure (4.1), même dans le cas fini-dimensionnel il peut exister plusieurs solutions à ce problème et peuvent être même très loin les uns des autres; la question qui se pose alors est sur quels critères on choisit notre solution : plusieurs travaux ont essayé de répondre à cette question de choix de paramètre. Cont et Tankov [24] ont proposé de partir d’un modèle de référence et prendre la solution la plus proche dans le sens d’entropie relative à cette mesure de probabilité a priori. Cette question qui se pose dans le cas des diffusions ou des sauts, plusieurs méthodes étaient proposées dans les articles qui ont traités les problèmes inverses en général et la calibration des modèles en finance. La plupart de ces méthodes se basent sur un *prior* (pour plus de détails voir [58])



- Il est instable par rapport aux observations [24] : une petite perturbation de  $u_M \equiv Y$  peut causer une grande variation du minimiseur. Explicitement, si on note par  $(\sigma_n^*, \nu_n^*) = \operatorname{arginf} \sum |u^{\sigma, \nu}(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)|^2$  et  $((\sigma_n^*)^\delta, (\nu_n^*)^\delta) = \operatorname{arginf} \sum |u^{\sigma, \nu}(T_i, x_i) - u_M^\delta(T_i, x_i)|^2$  avec  $\sum |u_M^\delta(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)| \leq \delta$ , alors on n'a pas nécessairement que  $((\sigma_n^*)^\delta, (\nu_n^*)^\delta)$  converge vers  $(\sigma_n^*, \nu_n^*)$  dans  $\mathcal{E}$ .

La question de calibration écrite sous la forme (4.8) est un problème de minimisation fonctionnel mal-posé grâce notamment à la non unicité de la solution et l'instabilité par rapport au observation. Le fait de ne pas avoir l'unicité conduit à une autre question : sur quels critères doit-on choisir la meilleure solution ?

## 4.2 Régularité du prix $u$ par rapport aux paramètres

Dans cette section, on va donner quelques propriétés de la fonction prix  $u$  qu'on aura besoin dans la suite de ce chapitre.

On note par  $\eta = \frac{\sigma^2}{2}$  pour faciliter le calcul. Soit  $(\eta_1, h_1)$  et  $(\eta_2, h_2)$  deux processus de Lévy de  $\bar{\mathcal{D}}_1$  et  $u_1(T, x)$ ,  $u_2(T, x)$  les fonctions prix d'options européennes solution de (3.34), alors la fonction définie par  $e(T, x) = u_1(T, x) - u_2(T, x)$  est solution de l'équation intégrale-différentielle avec terme source suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e}{\partial T} = \eta_1 \left\{ \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - \frac{\partial e}{\partial x} \right\} + \int_R h_1^2(y) e^y dy \{ e(T, x - y) - e(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial e}{\partial x} \} \\ \quad + (\eta_1 - \eta_2) \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\} \\ \quad + \int_R (h_1^2(y) - h_2^2(y)) e^y dy \{ u_2(T, x - y) - u_2(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u_2}{\partial x} \} \\ e(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Un objet utile dans toute la suite est la solution fondamentale associée à un opérateur intégral-différentiel  $L$ .

**Définition 4.2.0.2** Une distribution  $G(x, T, \xi, t)$  définie sur le domaine

$$\mathcal{D}(G) = \{(x, T, \xi, t) : x \in R, \xi \in R, 0 \leq t \leq T \leq T_{max}\}$$

est dite solution fondamentale associée à l'opérateur  $L^{\eta, h}$ , si elle satisfait à :

1.  $G(x, T, \xi, t)$  est continue en  $(x, T)$  et localement intégrable en  $(\xi, t)$ .
2.  $L^{\eta, h} G(x, T, \xi, t) = \delta(x - \xi) \delta(T - t)$  dans  $\mathcal{D}(G)$ .
3.  $\lim_{T \rightarrow t} G(x, T, \xi, t) = \delta(x - \xi)$  dans  $\mathcal{D}(G)$ .

Pour les caractéristiques de cette fonction  $G$ , voir [52, Chapitre 12]. Le lemme suivant donne une estimation a priori de la solution de ce type d'équation intégrodifférentielle avec terme source.

**Lemme 4.2.1** *Soit  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ ,  $v_0$  une fonction continue à support compact sur  $R$  et  $f(\cdot, \cdot) \in L^2(Q)$  ; alors le système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial T} + r \frac{\partial v}{\partial x} - \eta \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\ \quad - \int h^2(y) e^y dy \{v(T, x-y) - v(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial v}{\partial x}\} \\ \quad = \frac{\partial v}{\partial T} - L^{\eta, h} v(T, x) = f(T, x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{array} \right.$$

admet une unique solution  $v(T, x)$  dans  $C_0^{1,2}$ , qui satisfait :

$$\|v\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|v_0\|_{L^\infty(R)} + \|f\|_{L^2(Q)}) \quad (4.10)$$

où  $C$  est une constante positive qui ne dépend pas des fonctions  $f$  et  $v_0$ .

**Démonstration 4.2.1** *La solution  $v$  du système s'écrit sous la forme suivante*

$$v(x, T) = \int_R G(x, T, \xi, 0) v_0(\xi) d\xi + \int_0^T d\tau \int_R G(x, \xi, T, \tau) f(x, \tau) d\xi \quad (4.11)$$

avec

$$G(x, T, \xi, \tau) \leq \frac{C}{\sqrt{T-\tau}} \exp(-c \frac{|x-\xi|^2}{T-\tau}) \quad (4.12)$$

ce qui donne

$$\|v\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|v_0\|_{L^\infty(R)} + \|f\|_{L^2(Q)})$$

**Lemme 4.2.2** *Soit  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  alors la solution fondamentale  $G(x, T, \xi, \tau)$  associée à l'équation (3.34) pour  $(x, \xi) \in R, \infty > T \geq \tau \geq 0$  vérifie :*

$$G(x, T, \xi, t) = e^{-\xi} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi, T-t, x) - \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, T-t, x) \right\} \quad (4.13)$$

où  $u$  est le prix de l'option call, solution de l'équation forward (3.34).

**Démonstration 4.2.2** *Soit  $\xi = \ln(S_t)$  et  $u(x, T, \xi, t)$  solution de (3.34), alors  $u$  admet la représentation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} u(x, T, \xi, t) &= \int_R (e^\xi - e^u)_+ G(x, T-t, u, 0) du \\ &= \int_{-\infty}^\xi (e^\xi - e^u) G(x, T-t, u, 0) du \\ &= e^\xi \int_{-\infty}^\xi G(x, T-t, u, 0) du - \int_{-\infty}^\xi e^u G(x, T-t, u, 0) du \end{aligned}$$

on dérive la fonction  $u$  par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = e^\xi \int_{-\infty}^{\xi} G(x, T-t, u, 0) du \quad (4.14)$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = e^\xi \int_{-\infty}^{\xi} G(x, T-t, u, 0) du + e^\xi G(x, T-t, \xi, 0) \quad (4.15)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = e^\xi G(x, T-t, \xi, 0) \quad (4.16)$$

on déduit

$$G(x, T, \xi, t) = e^{-\xi} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} \quad (4.17)$$

**Proposition 4.2.0.1** *Tout couple de paramètres  $(\eta^*, h^*) \in M_{(\bar{\sigma}, \bar{h})}$  qui est solution moindres carrés la plus proche de  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  vérifie les propriétés suivantes :*

1. (Continuité) *Pour tout  $(T, x), (\eta, h) \longrightarrow u^{(T, x)}(\eta, h)$  est continue sur  $\overline{\mathcal{D}}_1$ .*
2. (Compacité) *Soit  $(\sigma^n, h^n) \in \overline{\mathcal{D}}_1$  une suite faiblement convergente de limite  $(\sigma, h) \in \overline{\mathcal{D}}_1$ ;*

$$|\sigma^n - \sigma| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} (h^n - h)(y) f(y) dy \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

*alors  $(u^n)^{T, x}$  solution de (3.34) avec les coefficients  $(\sigma^n, h^n)$  converge vers  $u^{T, x}$  dans  $R$ .*

3. (Différentiabilité)  *$u^{T, x}$  est une fonction différentiable dans le sens de Fréchet sur  $\overline{\mathcal{D}}_1$ .*

**Démonstration 4.2.3** *On remarque que la deuxième propriété donne la première. On commence alors par la preuve de la deuxième propriété :*

- Soit  $(\sigma^n, h^n)$  une suite de  $\overline{\mathcal{D}}_1$  qui satisfait à l'hypothèse (4.18) et  $u^n, u$  solutions respectives de (3.34) avec coefficients  $(\sigma^n, h^n)$  et  $(\sigma, h)$ . On note par  $\eta^n = \frac{\sigma^n}{2}$ ,  $\eta = \frac{\sigma}{2}$  alors  $e^n(T, x) = u(T, x) - u^n(T, x)$  est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial e^n}{\partial T} = L^{\eta, h} u + f^n(T, x) \\ e^n(0, x) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f^n(T, x) &= (\eta - \eta^n) \left\{ \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \frac{\partial u^n}{\partial x} \right\} \\ &\quad + \int (h^2(y) - (h^n)^2(y)) e^y dy \{ u^n(T, x - y) - u^n(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \} \end{aligned}$$

et  $L^{n,h}$  est le même opérateur intégral-différentiel que dans l'équation (3.34).

Si on applique l'estimation a priori du lemme (4.2.1) alors

$$\|u^n - u\|_{L^\infty}^2 \leq c \|f^n\|_{L^2} \quad (4.19)$$

or

$$\begin{aligned} \|f^n\|_{L^2}^2 &= 2 \|(\eta - \eta^n) \left\{ \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \frac{\partial u^n}{\partial x} \right\}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left\| \int_R (h^2(y) - (h^n)^2(y)) e^y dy g^n(T, x, y) dy \right\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

avec

$$\forall (T, x) \in \mathcal{Q} \quad g^n(T, x, y) = u^n(T, x - y) - u^n(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u^n}{\partial x}$$

D'après le lemme (4.2.2) on a :

$$\|(\eta - \eta^n) \left\{ \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \frac{\partial u^n}{\partial x} \right\}\|_{L^2}^2 \leq C |\eta - \eta^n|^2 \longrightarrow 0 \quad (4.20)$$

Puisque  $h^2(y)dy$  et  $(h^n)^2(y)dy$  sont des mesures associées à des processus de Lévy à variation finie et satisfaisent à  $\int_{|y| \geq 1} h^2(y) e^y dy < \infty$  comme on l'a supposé pour

l'équation forward (3.25), alors la fonction  $y \longrightarrow g(T, x, y)$  appartient à  $C_b^\infty$ .

On déduit alors

$$\left\| \int_R (h(y) - h^n(y)) \sqrt{e^y g(T, x, y)} dy \right\| \longrightarrow 0$$

or

$$\begin{aligned} &\left\| \int_R (h^2(y) - (h^n)^2(y)) e^y dy g(T, x, y) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \| (h - h^n)(y) dy \sqrt{e^y g^n(T, x, y)} \|_{L^2} \| (h + h^n)(y) dy \sqrt{e^y g^n(T, x, y)} \|_{L^2} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $u$  est une limite forte de la suite de fonctions  $u^n$ , et par suite l'opérateur  $u$  est compact; une propriété qui est vérifiée aussi par la fonction  $F$  et donne la continuité des deux fonctions  $u$  et  $F$  sur l'espace  $\bar{\mathcal{D}}_1$ .

- Pour la troisième propriété, commençons par rappeler la définition d'une fonction Fréchet-différentiable.

**Définition 4.2.0.3** Pour  $(T, x) \in \mathcal{Q}$  la fonction  $u$  définie sur  $\overline{\mathcal{D}_1}$  par :  $(\eta, h) \longrightarrow u(\eta, h)$  est Fréchet-différentiable en  $(\eta, h)$ , s'il existe une application linéaire  $L$  de  $\overline{\mathcal{D}_1}$  dans  $R$  qui vérifie

$$u(\eta + \eta', h + h') = u(\eta, h) + L.(\eta', h') + 0(\|(\eta', h')\|)$$

Or  $e(\eta, h) = u(\eta + \eta', h + h') - u(\eta, h)$  est solution d'une équation intégral-différentielle avec terme source définie par :

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial T} = L^{\eta, h} e + \eta' \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \\ \quad + \int_R (h'^2(y) + 2h(y)h'(y))e^y dy \{u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y})\frac{\partial u}{\partial x}\} \\ e(0, x) = 0 \end{cases}$$

par suite

$$\begin{aligned} e(\eta, h) &= \int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \eta' \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\}(\xi, \tau) \\ &\quad + \int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \int_R 2h(y)h'(y)e^y dy \{u(\tau, \xi - y) - u(\tau, \xi) + (1 - e^{-y})\frac{\partial u}{\partial \xi}\} \\ &\quad + \int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \int_R h'^2(y)e^y dy \{u(\tau, \xi - y) - u(\tau, \xi) + (1 - e^{-y})\frac{\partial u}{\partial \xi}\} \end{aligned}$$

si on note par

$$\delta^1(\eta, h)(\eta', h') = \int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \eta' \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\}(\xi, \tau) \quad (4.21)$$

$$\delta^2(\eta, h)(\eta', h') =$$

$$\int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \int_R 2h(y)h'(y)e^y dy \{u(\tau, \xi - y) - u(\tau, \xi) + (1 - e^{-y})\frac{\partial u}{\partial \xi}\} \quad (4.22)$$

et

$$r(\eta', h') =$$

$$\int_0^T d\tau \int_R d\xi G(x, T, \xi, \tau) \int_R h'^2(y)e^y dy \{u(\tau, \xi - y) - u(\tau, \xi) + (1 - e^{-y})\frac{\partial u}{\partial \xi}\} \quad (4.23)$$

alors

$$e(\eta, h) = \delta^1(\eta, h)(\eta', h') + \delta^2(\eta, h)(\eta', h') + r(\eta', h') \quad (4.24)$$

avec  $\delta^1$  et  $\delta^2$  sont linéaires et  $\frac{|r(\eta', h')|}{\|(\eta', h')\|_{\overline{\mathcal{D}_1}}} \rightarrow 0$  par suite  $u$  est fréchet différentiable sur  $\overline{\mathcal{D}_1}$  et

$$L(\eta', h') = \delta^1(\eta, h)(\eta', h') + \delta^2(\eta, h)(\eta', h') \quad (4.25)$$

Dans la suite pour  $(T, x) \in \mathcal{Q}$ , on note par  $\nabla u^{T,x}(\eta, h)$  la dérivée de  $u$  en  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  qui est donnée par  $\nabla u^{T,x}(\eta, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^{T,x}}{\partial \eta}(\eta, h) \\ \frac{\partial u^{T,x}}{\partial h}(\eta, h) \end{pmatrix}$ .

### 4.3 Régularisation de Tikhonov

Même en écrivant le problème inverse sous forme moindres carrés (4.8) nous disposons d'un problème mal posé : c'est ce que montre l'exemple de la figure 4.1. En effet dans la section précédente on a montré que; trouver une estimation de  $(\sigma^*, h^*) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  tel que

$$\begin{aligned} (\sigma^*, h^*) &= \operatorname{arginf}_{(\sigma, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1} \sum |u(T_i, x_i; \sigma, h) - u_M(T_i, x_i)|^2 \\ &= \operatorname{arginf}_{(\sigma, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1} \|F(\sigma, h) - Y\|^2 \end{aligned}$$

est mal posé.

La régularisation de Tikhonov est une méthode très générale pour la régularisation des problèmes inverses mal posés [63], [64]. Elle est utilisée pour la régularisation des problèmes inverses linéaires et non linéaires. La régularisation de Tikhonov était utilisée pour trouver l'opérateur réciproque de certains opérateur linéaire, pour des exemples voir [58].

Cette régularisation dépend de deux paramètres; le paramètre de régularisation  $\alpha$  et un point de référence qui doit être dans  $\bar{\mathcal{D}}_1$ . Le coefficient de régularisation, qui sera noté dans le reste de ce travail par  $\alpha$  joue un rôle très important dans la théorie de régularisation des problèmes mal posés (et par suite dans la qualité de calibration). En effet, pour  $\alpha$  petit, on serait en face d'un problème de minimisation d'une fonction non convexe ce qui nous vole la deuxième propriété d'un problème inverse mal posé. On va montrer ultérieurement qu'à partir d'un certain seuil  $\alpha_0$  la fonction de Thikhonov à minimiser est convexe ce qui nous garantit l'unicité de solution mais dans ce cas, le terme de régularisation domine la différence quadratique, ce qui nous envoie à un minimum très loin de la solution  $(\sigma^*, h^*)$  choisi parmi les solutions de la minimisation de la différence quadratique. En pratique, on sacrifie l'unicité pour une bonne précision. En effet, on prend un coefficient de régularisation  $\alpha \ll 1$  de telle sorte que la solution par régularisation de Tikhonov soit proche de celle de différence quadratique  $(\sigma^*, h^*)$ .

Or comme on a montré que la minimisation de la différence quadratique peut avoir plusieurs solutions (4.1), la régularisation de Tikhonov nous donne une estimation stable dans le sens (4.7) de la plus proche solution de (4.8) au point de référence  $(\bar{\sigma}, \bar{h})$  dans le sous espace de Hilbert  $\bar{\mathcal{D}}_1$ .

Avec cette régularisation, on ne s'intéresse pas en pratique à l'unicité de la solution

du problème (4.8), mais on s'intéresse plutôt à trouver une estimation stable de la solution  $(\sigma^*, h^*)$  de (4.8).

La répartition de cette partie, elle va être comme suit :

- Définir la fonction de Tikhonov  $J_\alpha(\sigma, h)$ .
- Etude de cette fonction et ses propriétés à partir de l'étude de la fonction prix  $u$  (puisque ils ont les mêmes variables à savoir  $\sigma$  et  $h$ ).
- Ensuite on étudie le comportement du minimiseur  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  en fonction du constante de régularisation  $\alpha$ .
- On termine par la comparaison la solution  $u_\alpha^\delta$  du système (3.34) avec les coefficients  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  et  $u^*$  solution du même système avec les coefficients  $(\sigma^*, h^*)$ ; c'est à dire étudier la qualité de la solution donnée par régularisation de Tikhonov à notre question de calibration.

### 4.3.1 Construction de la fonctionnelle régularisée

Pour une constante  $\alpha > 0$  qui représente le coefficient de régularisation et un point de référence  $(\bar{\sigma}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ , on définit la fonction de Tikhonov de la manière suivante

$$J_\alpha : \bar{\mathcal{D}}_1 \longrightarrow R_+$$

$$J_\alpha(\sigma, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u(T_i, x_i; \sigma, h) - u_M^\delta(T_i, x_i)|^2 + \alpha \|(\sigma - \bar{\sigma}, h - \bar{h})\|_{\bar{\mathcal{D}}_1}^2 \quad (4.26)$$

qui peut s'écrire, en utilisant la fonction vectorielle  $F$  définie dans la section précédente et le vecteur observation  $Y$  sous la forme suivante

$$J_\alpha(\sigma, h) = \|F(\sigma, h) - Y^\delta\|_{R^{\mathcal{I}}}^2 + \alpha \|(\sigma - \bar{\sigma}, h - \bar{h})\|_{\bar{\mathcal{D}}_1}^2$$

Cette fonction se décompose en deux parties : la première partie donne la différence quadratique entre les prix calculés par le modèle et les observations et une deuxième partie  $r_\alpha(\sigma, h)$  qui forme le terme de régularisation définie dans la régularisation de Tikhonov à partir d'un coefficient  $\alpha$  et d'un élément  $(\bar{\sigma}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ . La stabilité du résultat reste vrai pour n'importe quel terme de régularisation  $r_\alpha$  qui soit convexe positif sur  $\bar{\mathcal{D}}_1$ , la même chose pour l'algorithme de calibration qu'on le propose dans le chapitre suivant reste vrai.

On remplace alors le problème d'inversion de l'opérateur  $F$ ; qui est comme on a montré dans la section précédente un problème mal posé, surtout instable par

rapport au vecteur observation  $Y$ , par la minimisation de la fonction de Tikhonov  $J_\alpha$  qui est définie sur le même sous-espace de Hilbert convexe  $\overline{\mathcal{D}_1}$ . On cherche alors à partir de la régularisation de Tikhonov un minimum  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  de la fonction  $J_\alpha$  sur  $\overline{\mathcal{D}_1}$ , qui peut être une estimation d'une solution de (4.8), soit alors :

$$(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) = \operatorname{arginf}_{(\sigma, h) \in \overline{\mathcal{D}_1}} J_\alpha(\sigma, h) \quad (4.27)$$

Le but de la régularisation est de trouver une estimation stable en fonction des observations  $Y$ , le théorème suivant montre cette troisième propriété (4.7) qui est la plus importante dans la théorie des problèmes inverses. On montre aussi grâce aux propriétés de la fonction  $u(T, x)$  (qui donne le prix des calls de maturité  $T$  et de log-strike  $x$ ) l'existence de solution mais la propriété de l'unicité n'est vérifiée que pour des  $\alpha$  grande.

### 4.3.2 Existence, unicité et stabilité de la solution

- On commence par la stabilité.

Soient  $\{u^\delta(T_i, x_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  des observations de prix des calls européens connus avec une certitude  $\delta$  ;

$$|u^\delta(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)| \leq \delta \quad \forall i \in \mathcal{I} \iff \|Y^\delta - Y\|_{R^\mathcal{I}} \leq \delta$$

Le théorème suivant, dit théorème de Tikhonov, garantit la stabilité du minimiseur  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  de la fonction de Tikhonov en fonction des observations.

**Théorème 4.3.1** (*Théorème de Tikhonov*)

Soient  $\alpha > 0$  et  $u_k$  une suite de  $R_+^\mathcal{I}$  tel que

$$u_k^i \longrightarrow u^{\delta, i} \quad \forall i \in \mathcal{I} \iff Y_k \rightarrow Y \quad \text{dans } R^\mathcal{I}$$

si on note par  $(\sigma_k, h_k) \in \overline{\mathcal{D}_1}$  un minimiseur de (4.26) en remplaçant  $u^{\delta, i}$  par  $u_k^i$ , alors il existe une sous suite convergente de  $(\sigma_k, h_k) \in \overline{\mathcal{D}_1}$  et la limite de chaque sous suite convergente est un minimum de (4.26).

Pour la démonstration de ce théorème, il suffit qu'on vérifie les hypothèses du théorème de Tikhonov [39] à savoir ; il faut la fonction  $u$  soit continue en fonction des paramètres caractéristiques du processus de Lévy  $(\sigma, h)$  ce qui est déjà prouvé dans la proposition (4.2.0.1).

- L'unicité de solution est vérifiée que dans le cas où la fonction de Tikhonov  $J_\alpha$  soit convexe sur  $\overline{\mathcal{D}_1}$ . Pour cela il faut que Hessienne de  $J_\alpha$  soit définie positive. Cette propriété est démontrée dans le cas de diffusion où la fonction prix  $u$  dépend d'un seul paramètre qui est la fonction de volatilité locale, dans la



thèse de Crepey [29].

On montre dans le dernier chapitre de cette thèse cette propriété d'unicité dans le cas discret, c'est à dire dans le cas où la mesure de Lévy  $\nu$  est dans  $\mathcal{H}$ .

**Remarque 4.3.2.1** *En pratique, on ne s'intéresse pas à cette propriété d'unicité de solution parceque comme on va montrer dans la suite, pour un coefficient de régularisation  $\alpha \gg 1$  on s'éloigne beaucoup de la solution.*

- L'existence d'un minimiseur  $(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  de (4.26).

**Proposition 4.3.2.1**

*Pour  $\alpha > 0$ , la fonction  $J_\alpha$  admet au moins un minimum sur  $\bar{\mathcal{D}}_1$ .*

**Démonstration 4.3.1**

*La fonction  $J_\alpha$  est compact sur  $\bar{\mathcal{D}}_1$  et vérifie*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} J_\alpha(\sigma, h) = +\infty \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

*et*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow +\infty} J_\alpha(\sigma, h) = +\infty \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_{max}]$$

*par suite la fonction  $J$  admet un minimum sur l'espace Hilbertien  $\bar{\mathcal{D}}_1$*

On note par  $M_\alpha$  le sous ensemble suivant de  $\bar{\mathcal{D}}_1$ , soit

$$M_\alpha = \{(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) \text{ tel que } J(\sigma_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) \leq J(\sigma, h) \quad \forall (\sigma, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1\} \quad (4.28)$$

Dans le reste de cette étude on s'intéresse à la fonction  $J_\alpha$  avec des coefficients de régularisation  $\alpha \ll 1$ , ce qui donne un ensemble  $M_\alpha$  construit de plus qu'une solution. On donne le théorème suivant qui montre la convergence du minimum de  $J_\alpha$  vers un élément de  $M$  pour un choix précis de  $\alpha$ .

### 4.3.3 Comportement asymptotique de la solution

**Proposition 4.3.3.1**

*soit  $Y^\delta = \{u^\delta(T_i, x_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \in R^\mathcal{I}$  vérifiant*

$$|u^\delta(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)| \leq \delta \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (4.29)$$

*alors si on prend un coefficient de régularisation  $\alpha(\delta)$  qui satisfait à*

$$\alpha(\delta) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \longrightarrow 0$$

alors toute suite convergente  $(\eta_{\alpha_k}^{\delta_k}, h_{\alpha_k}^{\delta_k})$  minimisante de (4.26) avec  $\delta_k \rightarrow 0$  et  $\alpha_k = \alpha(\delta_k)$  admet une sous-suite convergente. La limite de chaque sous-suite convergente est une  $(\bar{\sigma}, \bar{h})$ -minimum-norme solution dans  $M_{(\bar{\sigma}, \bar{h})}$ . Si l'ensemble  $M_{(\bar{\sigma}, \bar{h})}$  contient un seul élément  $(\sigma^*, h^*)$  alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma_{\alpha(\delta)}^{\delta}, h_{\alpha(\delta)}^{\delta}) = (\sigma^*, h^*)$$

Avec cette proposition (4.3.3.1), le choix le plus simple du coefficient de régularisation est  $\alpha(\delta) = \delta^r$  avec  $0 < r < 2$ .

Pour la démonstration de la proposition (4.3.3.1), avec les propriétés qu'on a montré dans la proposition (4.2.0.1) en particulier la propriété de fortement continuité de la fonction prix en fonction des paramètres  $(\sigma, h)$ , on vérifie les hypothèses du [Théorème 3.1.2] du [58] et par suite on aura la même démonstration.

Pour améliorer le résultat de convergence de la proposition (4.3.3.1), on va donner les vitesses de convergence de  $(\sigma_{\alpha}^{\delta}, h_{\alpha}^{\delta})$  vers  $(\sigma^*, h^*)$ . Pour cela, on a besoin de quelques hypothèses supplémentaires.

$H_1$  (Comportement de  $\nabla u^{T,x}$  au voisinage de la solution  $(\sigma^*, h^*)$ )

On suppose que  $\nabla u^{T,x}$  est Lipschitz au point  $(\sigma^*, h^*)$ ; il existe  $L \geq 0$  tel que

$$|\nabla u(\eta^*, h^*) - \nabla u(\eta, h)|(T, x) \leq L \|(\eta - \eta^*, h - h^*)\|_{\bar{\mathcal{D}}_1} \quad (4.30)$$

$$\forall (\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1.$$

$H_2$  (Hypothèse sur le choix du point de référence  $(\bar{\sigma}, \bar{h})$ )

On suppose qu'il existe  $w \in R^{\mathcal{I}}$  qui vérifie

$$(\eta * -\bar{\eta}, h^* - \bar{h}) = (\nabla u^{T,x}(\eta^*, h^*))^* w \quad (4.31)$$

$H_3$  (Condition source)

on suppose que le coefficient de Lipschitz  $L$  définie dans (4.30) et  $w \in R_+^{\mathcal{I}}$  donnée dans (4.31) satisfait à

$$L \|w\| \leq 1 \quad (4.32)$$

### Proposition 4.3.3.2

Soit un point de référence  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  et  $(\eta^*, h^*)$  un  $(\bar{\eta}, \bar{h}) \in M_{(\bar{\eta}, \bar{h})}$  une solution moindres carrés de distance minimale à  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  qui satisfait aux hypothèses (4.31) et (4.32),

alors  $(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  solution de (4.26) converge vers la solution  $(\eta^*, h^*)$  de la façon suivante :

$$||(\eta_\alpha^\delta - \eta^*, h_\alpha^\delta - h^*)|| \leq \frac{\delta + \alpha||w||}{\sqrt{\alpha}\sqrt{(1 - L||w||)}}$$

et les prix d'options calculés par ces paramètres convergent vers les observations avec la vitesse suivante :

$$|u(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - u^\delta|(T, x) \leq \delta + 2\alpha||w||$$

### Démonstration 4.3.2

On note par  $q = (\eta, h) \in \overline{\mathcal{D}}_1$  le couple de paramètre du modèle exponentielle Lévy  $S_t$ .

Soit  $q_\alpha^\delta = (\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  solution de (4.26) et  $q^* = (\eta^*, h^*)$  solution de  $F(\eta^*, h^*) = Y$  alors :

$$||Y^\delta - F(q^*)||^2 + \alpha||q_\alpha^\delta - \bar{q}||_{\overline{\mathcal{D}}_1}^2 \leq \delta^2 + \alpha||q^* - \bar{q}||_{\overline{\mathcal{D}}_1}^2$$

et

$$\begin{aligned} ||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)||^2 + \alpha||q_\alpha^\delta - q^*||^2 &\leq \delta^2 + \alpha(||q^* - \bar{q}||^2 + ||q_\alpha^\delta - q^*||^2 + ||q_\alpha^\delta - \bar{q}||^2) \\ &= \delta^2 + 2\alpha \langle q^* - \bar{q}, q^* - q_\alpha^\delta \rangle_{\overline{\mathcal{D}}_1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Or la fonction prix  $u$  et par suite la fonction vectorielle  $F$  est Fréchet-différentiable, donc à partir de l'hypothèse (4.30) on a :

$$F(q_\alpha^\delta) = F(q^*) + \nabla F(q^*)(q_\alpha^\delta - q^*) + r_\alpha \quad (4.34)$$

avec

$$||r_\alpha|| \leq \frac{L}{2}||q_\alpha^\delta - q^*||^2$$

Si le point de référence  $\bar{q}$  satisfait à la condition source (4.31), alors (4.33) donne :

$$||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)||^2 + \alpha||q_\alpha^\delta - q^*||^2 \leq \delta^2 + 2\alpha \langle w, \nabla F(q^*)(q^* - q_\alpha^\delta) \rangle \quad (4.35)$$

qui peut être associée à (4.33) pour déduire

$$\begin{aligned} ||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)||^2 + \alpha||q_\alpha^\delta - q^*||^2 &\leq \delta^2 + 2\alpha \langle w, (Y - Y^\delta) + (Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)) + r_\alpha \rangle \\ &\leq \delta^2 + 2\alpha\delta||w|| + 2\alpha||w||||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)|| \\ &\quad + \alpha L||w||||q_\alpha^\delta - q^*||^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

par suite

$$\alpha(1 - L||w||)||q_\alpha^\delta - q^*||^2 \leq \delta^2 - ||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)||^2 + 2\alpha||w||(\delta + ||Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)||) \quad (4.37)$$

or

$$(\|Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)\| - \alpha\|w\|)^2 + \alpha(1 - L\|w\|)\|q_\alpha^\delta - q^*\|^2 \leq (\delta + \alpha\|w\|)^2 \quad (4.38)$$

or

$$L\|w\| \leq 1$$

on déduit les deux résultats de convergence.

Si on choisit le terme de régularisation selon le principe de Morozov (4.42), qui va être étudié dans la section suivante, on peut écrire ces deux résultats de convergence sous une forme plus simple. Le corollaire suivant donne les vitesses de convergence dans ce cas particulier.

### Corollaire 4.3.3.1

1) Si  $\alpha = c\delta$  alors :

$$\|(\eta_\alpha^\delta - \eta^*, h_\alpha^\delta - h^*)\| \leq \frac{1 + c\|w\|}{\sqrt{c}\sqrt{(1 - L\|w\|)}}\sqrt{\delta}$$

2) Si  $\alpha$  est choisi tel que

$$\delta \leq |u(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - u^\delta(T, x)| \leq c_1\delta$$

alors on a l'estimation suivante :

$$\|(\eta_\alpha^\delta - \eta^*, h_\alpha^\delta - h^*)\| \leq \sqrt{\frac{2(1 + c_1)\|w\|}{(1 - L\|w\|)}}\sqrt{\delta}$$

### Démonstration 4.3.3

i) Dans le premier cas où  $\alpha = c\delta$  la vitesse de convergence des paramètres

$$\frac{\delta + \alpha\|w\|}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1 - L\|w\|}} = \frac{1 + c\|w\|}{\sqrt{c}\sqrt{1 - L\|w\|}}\delta^{\frac{1}{2}}$$

ce qui est demandé dans le corollaire.

ii) Dans le deuxième cas où  $\alpha$  est choisi selon le principe de Morozov (voir section suivante)  $\alpha$  est telle que  $\delta \leq \|Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)\| \leq c_1\delta$ , ce qui donne

$$\delta - \|Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)\| \leq 0$$

et

$$\delta + \|Y^\delta - F(q_\alpha^\delta)\| \leq (1 + c_1)\delta$$

par suite l'inégalité donne directement le résultat.

1. Dans les démonstrations de ces deux résultats de convergence on confond la fonction réelle  $u$  et celle vectorielle  $F$  sans perte de généralité, puisque  $F$  est un vecteur dont les composantes sont des fonctions de  $u$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{I}) \inf_{i \in \mathcal{I}} u(T_i, x_i, \sigma, h) &\leq \|F(\sigma, h)\|_{R^{\mathcal{I}}}^2 \\ &\leq \text{card}(\mathcal{I}) \sup_{i \in \mathcal{I}} u(T_i, x_i, \sigma, h) \end{aligned} \quad (4.39)$$

2. La condition source (4.31) donnée comme hypothèse dans la proposition (4.3.3.1) reste théorique : sa signification réelle est que le point de référence  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  est proche de la solution, ce qui nécessite des informations a priori sur cette solution. Mais comme a montré Crépey dans le cas des diffusions [29], sans cette condition source on peut quand même montrer la convergence mais sans donner de vitesse de convergence. Il faut signaler aussi que la condition (4.32) qui lie le terme source  $w$  au coefficient de Lipschitz  $L$  de  $\nabla F$ .
3. Les vitesses de convergences données dans le corollaire sont plus simples que ceux données dans la proposition. En effet, on montre dans le corollaire que

$$|\eta_\alpha^\delta - \eta^*| + \left( \int_R (1 \wedge y^2) dy (h_\alpha^\delta - h^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0(\delta^{\frac{1}{2}})$$

Mais pour avoir ce résultat, on a imposé une hypothèse forte sur le choix du paramètre de régularisation  $\alpha$ . Dans la section suivante, on va montrer que cette hypothèse est vérifiée dans notre cas.

#### 4.3.4 Choix du paramètre de régularisation : Principe de Morozov

Comme on a indiqué dans les sections précédentes la qualité de la solution obtenue par régularisation de Tikhonov  $(\sigma_\alpha^\delta, \nu_\alpha^\delta)$  dépend de deux paramètres à savoir le point de référence  $(\bar{\sigma}, \bar{\nu}) \equiv (\bar{\eta}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  et le coefficient de régularisation  $\alpha$ .

Le point de référence  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  permet de sélectionner une unique solution, en pratique son choix résume l'information a priori disponible sur la solution. Dans la suite, on ne discutera pas ce choix et on fixe  $(\bar{\eta}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  et on suppose qu'il satisfait à

$$\|F(\bar{\eta}, \bar{h}) - Y\| \geq \delta \quad (4.40)$$

Le choix du coefficient de régularisation  $\alpha$  est plus délicat et nécessite un algorithme. En effet un résultat classique, dû à Bakushinshki [39], montre que si le paramètre de régularisation est choisi indépendamment du niveau de bruit  $\delta$  sur

les données alors la solution obtenue ne converge pas vers la solution exacte quand  $\delta \rightarrow 0$  sauf si le problème est bien posé.

En effet, si on prend ce coefficient  $\alpha$  trop grand, le terme de régularisation  $J_\alpha$  domine la différence quadratique entre prix du modèle et observations, c'est à dire

$$\|F(\eta, h) - Y\|_{\mathcal{L}}^2 \ll J_\alpha(\eta, h)$$

et dans ce cas  $(\eta_\alpha, h_\alpha) \equiv (\bar{\eta}, \bar{h})$  qui est loin de  $(\eta^*, h^*)$  à cause de la condition imposée sur le choix du prior. Dans le cas contraire où ce coefficient  $\alpha$  est très petit, la fonction  $J(\eta, h) \equiv \|F(\eta, h) - Y\|^2$  qui est un problème inverse mal posé est essentiellement instable par rapport à une perturbation des observations  $Y$ .

La solution proposée par Morozov [54] est alors de choisir  $\alpha$  en fonction du niveau de bruit sur les données observées afin de faire un compromis entre précision et stabilité de la solution.

On notera  $\alpha \rightarrow J(\eta_\alpha, h_\alpha)$  la dépendance de la solution en  $\alpha$ . La qualité de la reconstitution des observations est mesurée par l'erreur a posteriori

$$\alpha \rightarrow \|F(\eta_\alpha, h_\alpha) - Y\|$$

L'idée du principe de Morozov est de choisir  $\alpha$  telle que l'erreur de calibration  $\|F(\eta_\alpha, h_\alpha) - Y\|$  soit du même ordre que l'erreur a priori  $\delta$  sur les données :

$$\delta \leq \|Y^\delta - F(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)\| \leq c_1 \delta \quad (4.41)$$

Commençons par une propriété de continuité par rapport au paramètre de régularisation :

**Proposition 4.3.4.1** *Soit  $\alpha_k \rightarrow \alpha > 0$  tel que  $\alpha_k > 0$  alors :*

$$J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) \rightarrow J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$$

ce qui montre la continuité de la fonction  $\alpha \rightarrow J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$

**Démonstration 4.3.4** *On commence à remarquer que si  $0 < \alpha_1 < \alpha_0$  alors*

$$J_{\alpha_1}(\eta_{\alpha_1}^\delta, h_{\alpha_1}^\delta) \leq J_{\alpha_1}(\eta_{\alpha_0}^\delta, h_{\alpha_0}^\delta) \leq J_{\alpha_0}(\eta_{\alpha_0}^\delta, h_{\alpha_0}^\delta) \quad (4.42)$$

*par suite*

$$|J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) - J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)| = \begin{cases} J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) - J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) & \text{si } \alpha \leq \alpha_k \\ J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) & \text{si } \alpha \geq \alpha_k \end{cases}$$

*or d'après 4.42 on a pour  $\alpha \leq \alpha_k$*

$$\begin{aligned} J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) - J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) &\leq J_{\alpha_k}(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) \\ &= (\alpha_k - \alpha) \|(\eta_\alpha^\delta - \bar{\eta}, h_\alpha^\delta - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \end{aligned}$$

et pour  $\alpha \geq \alpha_k$  on a :

$$\begin{aligned} J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) &\leq J_\alpha(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) - J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) \\ &= (\alpha - \alpha_k) \|(\eta_{\alpha_k}^\delta - \bar{\eta}, h_{\alpha_k}^\delta - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \end{aligned}$$

or

$$\alpha_k \|(\eta_{\alpha_k}^\delta - \bar{\eta}, h_{\alpha_k}^\delta - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \leq J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta) \leq J_{\alpha_k}(\bar{\eta}, \bar{h}) = \|Y^\delta - F(\bar{\eta}, \bar{h})\|^2$$

ce qui donne

$$|J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - J_{\alpha_k}(\eta_{\alpha_k}^\delta, h_{\alpha_k}^\delta)| \leq |\alpha - \alpha_k| \max\left\{ \frac{1}{\min(\alpha_k)} \|Y^\delta - F(\bar{\eta}, \bar{h})\|, \|(\eta_\alpha^\delta - \bar{\eta}, h_\alpha^\delta - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \right\}$$

qui converge vers 0 lorsque  $k$  converge vers l'infini.

**Remarque 4.3.4.1** 1) Cette propriété donne seulement la continuité de la fonction  $\alpha \rightarrow J_\alpha(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$ , elle n'implique pas la continuité de la fonction  $\alpha \rightarrow (\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  et par suite de la fonction erreur  $\alpha \rightarrow \|Y^\delta - F(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)\|$ , pour plus de détails et des contres exemples voir [59] [61] [60].

2) Dans [61], on trouve d'autres propriétés de la solution de Tikhonov, de la fonction  $J_\alpha$  et fonction erreur en fonction du terme de régularisation.

Donc si le coefficient  $\alpha$  est choisit de sorte que

$$\delta \leq \|Y^\delta - F(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)\| \leq c_1 \delta \quad (4.43)$$

alors nous avons l'estimation suivante pour la vitesse de convergence des paramètres :

$$\|(\eta_\alpha^\delta - \bar{\eta}, h_\alpha^\delta - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

Le théorème suivant, montre l'existence de  $\alpha$  qui satisfait (4.43).

**Proposition 4.3.4.2** (Théorème de Morozov)

Soit un point de référence  $(\bar{\eta}, \bar{h}) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  qui satisfait à

$$\|Y^\delta - F(\bar{\eta}, \bar{h})\| \geq c\delta \quad (4.45)$$

s'il n'existe pas un  $\alpha$  qui satisfait à (4.43), alors  $\exists \alpha_0 \geq \alpha_1 > 0$  qui vérifient :

$$\|Y^\delta - F(\eta_{\alpha_0}^\delta, h_{\alpha_0}^\delta)\| \geq c_1 \delta \quad (4.46)$$

$$\|Y^\delta - F(\eta_{\alpha_1}^\delta, h_{\alpha_1}^\delta)\| \leq \delta \quad (4.47)$$

Et dans ce cas, on prend  $\alpha_1$  comme coefficient de régularisation.

### 4.3.5 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème d'estimation des paramètres  $(\sigma, \nu)$  d'un processus exponentielle-Lévy  $S_t = \exp(rt + X_t)$  où  $X_t$  est un processus de Lévy à partir de prix d'options, en le formulant comme un problème inverse pour une équation integrodifférentielle. Pour cela, on a utilisé la méthode de régularisation de Tikhonov, généralisant les travaux similaires dans le cas des modèles de diffusion [1, 29]. Nous avons étudié l'existence de solutions pour le problème régularisé et la vitesse de convergence des estimateurs. Cette méthode peut être utilisée sans grande modification pour une classe plus générale de processus comme les modèles à sauts avec volatilité locale [4, 21] dont la dynamique est donnée par

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \sigma(t, S_{t-})dW_t + \int (e^z - 1)\tilde{J}_X(dtdz) \quad (4.48)$$

avec

$$\sigma(.,.) \in \{\lambda^{-1} \leq \sigma(.,.) \leq \lambda; \sigma(.,.) \in H^1(\mathcal{Q})\}$$

la mesure de saut  $\nu$  peut dépendre du temps  $t$ . Nous avons cependant limité les exemples au cas volatilité constante car cette dernière formulation pose probablement des problèmes de surparamétrisation.





# Chapitre 5

## Calcul du gradient et Tests numériques

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme pour la résolution du problème de calibration régularisé formulé au chapitre précédent. Il s'agit de minimiser la fonction de Tikhonov

$$J_\alpha(\eta, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u(T_i, x_i, \sigma, h) - u_M(T_i, x_i)|^2 + \alpha \|(\sigma - \bar{\sigma}, h - \bar{h})\|_{\bar{\mathcal{D}}_1}^2 \quad (5.1)$$

sur le convexe Hilbertien  $\bar{\mathcal{D}}_1$ . Pour cela, on va utiliser une méthode de descente de gradient [3, 12]. La difficulté numérique de cette méthode d'optimisation est dans le calcul du gradient de la fonctionnelle non linéaire  $J_\alpha$ . Notre idée est d'introduire la solution d'une autre équation intégral-différentielle qui est l'équation d'état adjoint et d'exprimer le gradient sous forme intégrale par rapport à l'état adjoint et la fonction prix  $u$ .

Le problème de calibration est donc :

$$\text{Chercher un couple } (\sigma^*, \nu^*(dy)) = (\sigma^*, (h^*)^2(y)dy) \quad (5.2)$$

tel que

$$(\sigma^*, h^*) \in \bar{\mathcal{D}}_1 \quad (5.3)$$

et les prix du modèle calculés à partir de l'équation (3.34) avec les paramètres  $(\sigma^*, h^{*2})$  satisfaisaient à

$$u(T_i, x_i; \sigma^*, h^*) = u_M(T_i, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

On prend  $\eta = \frac{\sigma^2}{2}$  : On cherche alors une estimation de  $(\eta^*, h^*) = (\frac{(\sigma^*)^2}{2}, h^*) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  qui satisfait à :

$$u(T_i, x_i; \eta^*, h^*) = u_M(T_i, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.4)$$

Dans le chapitre (4) on a montré, à partir du principe de Morozov, l'existence d'un paramètre de régularisation  $\alpha(\delta)$  qui donne un minimiseur

$$(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) = \operatorname{arginf} J_{\alpha(\delta)}(\eta, h) \quad (5.5)$$

tels que les prix calculés avec ces paramètres satisfaisent à

$$\delta \leq \sum |u(T_i, x_i; \eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta) - u_M(T_i, x_i)| \leq c\delta.$$

où

$$J_\alpha(\eta, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u(T_i, x_i; \eta, h) - u^\delta(x_i, T_i)|^2 + \alpha(\delta) \|(\eta - \bar{\eta}, h - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2 \quad (5.6)$$

est la fonction de Tikhonov et  $u^\delta(T_i, x_i)$  sont les observations bruitées qui vérifient

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} |u^\delta(T_i, x_i) - u_M(T_i, x_i)| \leq \delta \quad (5.7)$$

Cette estimation  $(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  est stable par rapport aux observations. Comme on a expliqué dans le chapitre (4), pour des  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  qui satisfèrent à la condition source de la proposition de convergence (4.3.3.2), la minimisation de la fonction de Tikhonov nous donne une estimation stable de la solution moindre carrée  $(\eta^*, h^*) \in M$  du problème de calibration la plus proche de  $(\bar{\eta}, \bar{h})$ .

## 5.1 Calcul du gradient de $J$

Pour minimiser la fonction de Tikhonov  $J_\alpha(\eta, h)$ , on utilise une méthode du descente de gradient. Ce raisonnement a été utilisé dans le cas des processus de diffusions où les prix d'options  $u$  sont solutions des équations dérivées partielles paraboliques, voir [1, 14]. Elle consiste à estimer numériquement le gradient de la fonction  $J_\alpha$  définie par

$$\nabla J_\alpha(\eta, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_\alpha}{\partial \eta}(\eta, h) \\ \frac{\partial J_\alpha}{\partial h}(\eta, h) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Les expressions (4.21) et (4.22) donnent la fonction  $\nabla J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h')$  en fonction de la solution fondamentale associée à l'opérateur intégro-différentiel  $L$  qui est difficile à calculer numériquement. Dans cette partie, on donne une écriture intégrale de  $\nabla J_\alpha$ , notamment avec la donnée de l'équation *forward* (3.34) qui donne les prix des options européenne pour toutes maturités  $T$  et prix d'exercices  $K$ .

On note par  $\delta^\eta J_\alpha$  et  $\delta^h J_\alpha$  les dérivées directionnelles respectives de  $J_\alpha$  par rapport à  $\eta$  et  $h$  selon la direction  $\eta'$  et  $h'$ ,  $\delta^\eta u$  et  $\delta^h u$  les dérivées respectives de  $u$  par rapport à  $\eta$  et  $h$  appliquées respectivement à  $\eta'$  et  $h'$ . L'existence de ces dérivées est assurée grâce au troisième point de la proposition (4.2.0.1).

### 5.1.1 Calcul de la variation de $u$

On commence par calculer les dérivées de  $u$  qui sont données dans (4.21) et (4.22), comme solutions d'équation intégral-différentielles avec terme source bornés. Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $(T, x) \in \mathcal{Q}$  et  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ ,  $h' \in \mathcal{D}_1$  on note par :

$$u_\varepsilon(T, x; \eta, h) = \frac{u(T, x; \eta, h + \varepsilon h') - u(T, x; \eta, h)}{\varepsilon}$$

Étant donné que  $u$  est solution de (3.34), on vérifie facilement, puisque l'équation (3.34) est linéaire, que  $u_\varepsilon$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial T} + r \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \eta \left\{ \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right\} \\ \quad - \int h^2(y) e^y dy \{ u_\varepsilon(T, x - y) - u_\varepsilon(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \} \\ \quad = 2 \int h(y) h'(y) e^y dy \{ u_\varepsilon(T, x - y) - u_\varepsilon(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \} \\ + \varepsilon \int h'(y) e^y dy \{ u(T, x - y; \eta, h + \varepsilon h') - u(T, x; \eta, h + \varepsilon h') + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u(T, x; \eta, h + \varepsilon h')}{\partial x} \} \\ u_\varepsilon(0, x) = 0 \end{array} \right.$$

Or  $\delta^h u$  la dérivée de  $u$  par rapport à  $h$  selon la direction  $h'$ , qui peut être écrite comme  $\frac{\partial u}{\partial h}(T, x; \eta, h; h') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(T, x; \eta, h)$ . Puisque  $h$  et  $h'$  sont dans  $\mathcal{D}_1$  qui est l'ensemble des mesures de Lévy à densité qui intègre  $|x|$  en 0, alors :

$$\int h'(y) e^y dy \{ u(T, x - y; \eta, h + \varepsilon h') - u(T, x; \eta, h + \varepsilon h') + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u(T, x; \eta, h + \varepsilon h')}{\partial x} \}$$

est borné. Par suite,  $\delta^h u$  est l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta^h u}{\partial T} + r \frac{\partial \delta^h u}{\partial x} - \eta \left\{ \frac{\partial^2 \delta^h u}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta^h u}{\partial x} \right\} \\ \quad - \int h^2(y) e^y dy \{ \delta^2 u(T, x - y) - \delta^2 u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial \delta^2 u}{\partial x} \} \\ \quad = 2 \int h(y) h'(y) e^y dy \{ u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \} \\ \delta^2 u(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

de la même manière on écrit  $\delta^\eta u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(T, x; \eta + \varepsilon, h) - u(T, x; \eta, h)}{\varepsilon}$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial T} + r \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial x} - \eta \left\{ \frac{\partial^2 \delta^\eta u}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial x} \right\} \\ - \int h^2(y) e^y dy \{ \delta^\eta u(T, x-y) - \delta^\eta u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial x} \} \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \delta^\eta u(0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Les équations (5.10) et (5.9) sont deux équations intégro-différentielles de même type que (3.34) avec un terme source borné. Le lemme (4.2.1), montre l'existence et l'unicité de solutions pour ces deux équations qui sont données respectivement par (4.21 et 4.22).

### 5.1.2 Calcul des variations de la fonction de Tikhonov

La fonctionnelle  $J_\alpha$  obtenue après régularisation de Tikhonov de la différence quadratique entre les observations du marché et les prix calculés avec l'équation (3.34) est donnée par :

$$J_\alpha^\delta(\eta, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u^{\eta, h}(x_i, T_i) - u^\delta(x_i, T_i)|^2 + \alpha(\delta) \|(\eta - \bar{\eta}, h - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2$$

On peut l'écrire sous une forme plus générale

$$J_\alpha^\delta(\eta, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2 + r_\alpha(\eta, h) \quad (5.11)$$

où  $r_\alpha(\eta, h)$  est une fonction convexe sur  $\overline{\mathcal{D}}_1$  et  $r_\alpha(\bar{\eta}, \bar{h}) = 0$ .

Par la même méthode qu'on a utilisé pour le calcul des variations de  $u$ , on calcule celle de  $J_\alpha$ .

$$\delta^h J_\alpha - \delta^h r_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{(|u^{\eta, h+\varepsilon h'}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2 - |u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2)}{\varepsilon} \quad (5.12)$$

$$= 2 < \sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta, h}(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i}; \delta^h u(T, x) >$$

et

$$\delta^\eta J_\alpha - \delta^\eta r_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{(|u^{\eta+\varepsilon, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2 - |u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2)}{\varepsilon} \quad (5.13)$$

$$= 2 < \sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta, h}(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i}; \delta^\eta u(T, x) >$$

où  $\delta^\eta u$  et  $\delta^h u$  sont les dérivées respectives de  $u$  par rapport à  $\eta$  et par rapport à  $h$  appliquées à  $\eta'$  et  $h'$  solutions de (5.10) et (5.9),  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire associé à l'espace de Hilbert  $L^2(\mathcal{Q})$  avec  $\mathcal{Q} = [0, \bar{T}] \times R$ .

Pour trouver une formule plus simple aux expressions de  $\delta^\eta J_\alpha$  et  $\delta^h J_\alpha$ , on introduit la fonction d'état adjoint  $P$  solution d'une équation rétrograde.

Pour  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$  on note par  $P(T, x; \eta, h)$  la solution de l'équation intégral-différentielle avec terme source suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial T} = -\eta \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \right\} \\ \quad + \int h^2(y) dy e^y \{ -P(T, x+y) + P(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial P}{\partial x} \} \\ \quad + 2 \sum_i (u(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i} \\ P(\bar{T}, x) = 0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

où  $u(T, x)$  est solution de (3.34) avec les mêmes paramètres  $(\eta, h)$ .

Pour  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ ,  $P(\cdot, \cdot)$  est solution d'une équation intégral-différentielle rétrograde linéaire avec terme source

$$g(T, x) = 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} (u(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i} \quad (5.15)$$

qui admet une unique solution bornée.

### 5.1.3 Gradient sous forme intégrale

Les formules (5.13 et 5.12) donnent une écriture sous forme de produit scalaire du gradient de  $J_\alpha$  en fonction du gradient de  $u$ . Pour calculer  $\nabla J_\alpha$ , il nous faut résoudre trois équations intégral-différentielles qui sont (3.34) pour calculer la fonction prix  $u(T, x)$ , (5.10) pour calculer  $\delta^\eta u$  et (5.9) pour calculer  $\delta^h u$ .

Si on note par  $L(\cdot)$  et  $L^*(\cdot)$  les opérateurs intégral-différentiels des équations (3.34) et (5.14), définis par :

$$Lf = \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \int_R h^2(y) e^y dy \left\{ f(T, x-y) - f(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

et

$$L^*f = \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} - \int_R h^2(y) e^y dy \left\{ -f(T, x-y) + f(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

on remarque que :

$$\langle Lf, g \rangle_{L^2(\mathcal{Q})} = \langle f, L^*g \rangle_{L^2(\mathcal{Q})}$$

En utilisant la fonction  $P$  solution de (5.14),  $\delta^\eta J_\alpha$  et  $\delta^h J_\alpha$  peuvent être écrites respectivement sous forme intégrale.

**Proposition 5.1.3.1** (*Forme intégrale des variations de la fonctionnelle régularisée*)  
 Pour  $(\eta, h)$  et  $(\eta', h') \in \bar{\mathcal{D}}_1$ , on a :

$$\delta^h J_\alpha - \delta^h r_\alpha = -2 \int_{\mathcal{Q}} \int_R h(y) h'(y) e^y dy$$

$$[u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x}] P(T, x) dx dT \quad (5.16)$$

et

$$\delta^\eta J_\alpha - \delta^\eta r_\alpha = -2\eta' \int_{\mathcal{Q}} [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}] P(T, x) dx dT \quad (5.17)$$

### Démonstration 5.1.1

D'après la formule (5.12) on a :

$$\delta^h J_\alpha - \delta^h r_\alpha = 2 \langle \sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i}; \delta^h u \rangle$$

or dans (5.14)

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i} = \frac{\partial P}{\partial T} - L^* P(T, x)$$

par suite :

$$\begin{aligned} \delta^h J_\alpha - \delta^h r_\alpha &= 2 \langle \frac{\partial P}{\partial T} - L^* P(T, x); \delta^h u \rangle_{L^2(\mathcal{Q})} \\ &= -2 \langle P(T, x); \frac{\partial \delta^h u}{\partial T} - L \delta^h u \rangle_{L^2(\mathcal{Q})} \end{aligned}$$

et d'après (5.9)

$$\frac{\partial \delta^h u}{\partial T} - L \delta^h u = 2 \int_R h(y) h'(y) e^y dy \{ u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta^h J_\alpha - \delta^h r_\alpha &= \\ -2 \int_{\mathcal{Q}=[0, (\bar{T})] \times R} \int_R h(y) h'(y) dy e^y dy [u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x}] P(T, x) dx dT \end{aligned}$$

par la même manière

$$\delta^\eta J_\alpha - \delta^\eta r_\alpha = 2 < \sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta,h}(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i}; \delta^1 u >$$

on utilise

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (u^{\eta,h}(T, x) - u^\delta(T_i, x_i)) = \frac{\partial P}{\partial T} - L^* P$$

alors :

$$\begin{aligned} \delta^\eta J_\alpha - \delta^\eta r_\alpha &= 2 < \frac{\partial P}{\partial T} - L^* P, \delta^\eta u > \\ &= -2 < P, \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial T} - L \delta^\eta u > \\ &= -2\eta' < P, \frac{\partial^2 \delta^\eta u}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta^\eta u}{\partial x} > \end{aligned}$$

qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$\delta^\eta J_\alpha - \delta^\eta r_\alpha = -2\eta' \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} (T, x) P(T, x) dT dx$$

on rappelle que :

$$J : \bar{\mathcal{D}}_1 \longrightarrow R_+ \quad (\eta, h) \longrightarrow J_\alpha(\eta, h)$$

et  $\nabla J_\alpha$  est la fonction définie par :

$$\nabla J_\alpha(\eta, h) : \bar{\mathcal{D}}_1 \longrightarrow R$$

tel que  $\nabla J_\alpha(\eta, h).(\eta', h') = \delta^\eta J_\alpha + \delta^h J_\alpha$  qui est la somme des deux intégrales données par l'expression (5.16 et 5.17), qui peuvent être estimées à partir des méthodes de quadrature (trapèze, etc ...)

## Algorithme de Calibration

Voici les étapes de l'algorithme numérique de calibratin.

- Choisir  $(\eta^0, h^0) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $m=0$  m=nombre d'itérations.
  - Calcul du gradient à l'étape  $m$
1. Calculer  $u^m(T, x)$  solution de (3.34) avec les paramètres  $(\eta^m, h^m)$ .
  2. Calculer  $P^m(T, x)$  solution de (5.14) avec les mêmes paramètres  $(\eta^m, h^m)$  et la



fonction  $u^m$ .

3. Calcul du gradient en résolvant l'équation.

$$\langle \nabla J_\alpha(\eta^m, h^m), (\eta', h') \rangle = \langle \delta^n J, \eta' \rangle + \langle \delta^h J, h' \rangle \quad (5.18)$$

$$= -2\eta' \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} - \frac{\partial u^m}{\partial x} \right\} (T, x) P^m(T, x) dT dx \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\mathcal{Q}} \int_R h^m(y) h'(y) dy e^y dy [u^m(T, x-y) - u^m(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u^m}{\partial x}] P^m(T, x) dx dT \\ & + \langle \nabla r_\alpha(\eta^m, h^m), (\eta', h') \rangle \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\forall (\eta', h') \in \overline{\mathcal{D}}_1$$

$$\|\nabla J_\alpha(\eta^m, h^m)\| = \sup_{(\eta', h') \in \overline{\mathcal{D}}_1} \frac{|\langle \nabla J_\alpha(\eta, h), (\eta', h') \rangle|}{\|(\eta', h')\|}$$

• Si  $\|\nabla J_\alpha(\eta^m, h^m)\| > \varepsilon$ , on passe à l'étape suivante, en posant

$$(\eta^{m+1}, h^{m+1}) = \pi_{\overline{\mathcal{D}}_1}((\eta^m, h^m) - \rho_m \nabla J_\alpha(\eta^m, h^m))$$

Où  $\pi_{\overline{\mathcal{D}}_1}$  est la projection sur l'espace  $\overline{\mathcal{D}}_1$  et  $\rho_m$  le pas de descente.

## 5.2 Résultats numériques de calibration

Dans cette partie, on explique les différentes étapes numériques de l'algorithme de calibration (5.1.3) donné dans ce chapitre. Le premier et le deuxième point consistent à résoudre les deux équations intégrodifférentielles qu'on a développé; l'équation forward du problème direct (3.34) qui donne la fonction  $u$  et le système adjoint (5.14) qui donne la fonction d'état adjoint  $P$ . Les deux systèmes sont de même type, et seront résolus par la même méthode celle de différences finies [28],[18]. Dans un deuxième temps, on s'intéresse à déterminer le meilleur coefficient de régularisation à partir du *principe de Morozov* (4.42). Enfin, on termine par le calcul du gradient de  $J_\alpha$  donné par (5.16), (5.17) en approchant la forme intégrale : par la méthode des trapèzes, après paramétrisation de  $\overline{\mathcal{D}}_1$ .

### 5.2.1 Méthode de différences finies pour la résolution des EDPI de $u$ et $P$ .

On décrit dans ce paragraphe la méthode de différences finies qu'on va utiliser pour la résolution des équations intégral-différentielles du problème direct (3.34) et du système adjoint (5.14). Pour une étude complète de cette méthode, voir le papier [28]. Il y'a cependant plusieurs autres méthodes pour la résolution de telles équations, comme celles de  $\theta$ -schéma [18] ou par méthode d'élément finie [51].

On a vu dans le chapitre 3, que le prix à  $t = 0$  d'une option Européenne dont le sous-jacent suit un modèle exponentielle Lévy  $S_t = \exp(rt + X_t)$ , à l'instant  $t_0 = 0$  de maturité  $T$  et log-strike  $x$  est solution d'une EDPI de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = \eta \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \int h^2(y) e^y dy \{ u(\tau, x - y) - u(\tau, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \} \\ u(0, x) = (1 - e^x)_+ \end{cases}$$

où  $(\eta = \frac{\sigma^2}{2}, h^2(.))$  sont les paramètres du processus de Lévy. On suppose que  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ .

Pour  $(\eta, h) \in \bar{\mathcal{D}}_1$ ,  $\lambda$  et  $\alpha$  définies par :

$$\lambda = \int h^2(y) e^y dy \quad \text{et} \quad \alpha = \int (e^y - 1) h^2(y) dy \quad (5.21)$$

sont finies, et (3.34) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\eta - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u(t, x) + \int_R h^2(y) e^y u(T, x - y) dy \\ u(0, x) = (1 - e^x)_+ \end{cases}$$

équation que l'on peut réécrire ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = \mathcal{D}u + \mathcal{J}u \\ u(0, x) = (1 - e^x)_+ \end{cases}$$

avec  $\mathcal{D}(\cdot)$  représente la partie différentielle de l'opérateur, donnée par :

$$\mathcal{D}u = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\eta - \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u(t, x) \quad (5.22)$$

et  $\mathcal{J}(\cdot)$  pour la partie intégrale donnée par :

$$\mathcal{J}u = \int_R h^2(y) e^y u(T, x - y) dy \quad (5.23)$$

### 5.2.2 Schéma implicite-explicite aux différences finies

Cette section applique le schéma donné par [28] à la résolution de l'équation intégral-différentielle (5.2.1). Pour utiliser cette méthode de différences finies, on localise le système (5.2.1) dans  $[0, T_{max}] \times [-A, A]$  pour  $A \gg 1$ . On construit une grille uniforme sur cet ensemble, soient  $M, N \gg 1$  et  $T_1 = 0$ ,  $T_{M+1} = T_{max}$ ,  $x_1 = -A$  et  $x_{N+1} = A$ . On note par  $\Delta T$  et  $\Delta x$  les pas respectifs en temps et espace de cette grille. Soient  $\Delta T = \frac{T_{max}}{M}$  et  $\Delta x = \frac{2A}{N}$ . On note par  $\{(u_i^j)_{N,M}\}$  (pour une écriture simple, on notera simplement par  $u_i^j$ ) l'approximation de  $u(x_i, T_j)$  sur cette grille.

Pour estimer les intégrales qui apparaissent dans la partie différentielle  $\mathcal{D}$  et la partie intégrale  $\mathcal{J}$ , on utilise aussi la méthode des trapèzes. On va supposer que le support de la mesure  $\nu(dy) = h^2(y)dy$  est le même support que l'intervalle de localisation du système (5.2.1), c'est à dire  $\text{supp } \nu = [-A - \frac{1}{2}\Delta x, A + \frac{1}{2}\Delta x]$ , alors on peut estimer la partie intégrale ;  $Ju(T, x) = \int_R h^2(y)e^y u(T, x-y)dy$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}u(T, x) &= \int_R h^2(y)e^y u(T, x-y)dy \\ &= \int_{-A-\frac{1}{2}\Delta x}^{A+\frac{1}{2}\Delta x} h^2(y)e^y u(T, x-y)dy \approx \Delta x \sum_{i=1}^{i=N+1} h^2(x_i)e^{x_i} u(T, x-x_i) \end{aligned}$$

de la même manière on approche les intégrales qui donnent  $\lambda$  et  $\alpha$  (5.21), soient

$$\lambda \approx \hat{\lambda} = \Delta x \sum_{i=1}^{i=N+1} h(x_i)^2 e^{x_i} \quad \text{et} \quad \alpha \approx \hat{\alpha} = \Delta x \sum_{i=1}^{i=N+1} h(x_i)^2 (e^{x_i} - 1)$$

les dérivées en  $x$  qui forment la partie différentielle  $\mathcal{D}$  sont discrétisées par des différences finies de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

et

$$\left(\frac{\partial u^j}{\partial x}\right)_i \approx \begin{cases} \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} & \text{si } \eta - \alpha < 0 \\ \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta x} & \text{si } \eta - \alpha > 0 \end{cases}$$

La méthode de [28] traite la partie différentielle, qui donne lieu à une matrice tri-diagonale, de façon implicite et la partie intégrale qui donne une matrice pleine de façon explicite suivante :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta T} = (\mathcal{D}u^{j+1})_i + (\mathcal{J}u^j)_i$$

avec

$$(\mathcal{D}u^j)_i = \eta \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2} \right)_i - (\eta - \hat{\alpha}) \left( \frac{\partial u^j}{\partial x} \right)_i - \hat{\lambda} u_i^j$$

et

$$(\mathcal{J}u^j)_i = \Delta x \sum h^2(x_k) e^{x_k} u_{i-k}^j$$

où

$$u_{i-k}^j = \begin{cases} 1 - e^{(x_i - x_k)} & \text{si } x_i - x_k \leq x_0 \\ 0 & \text{si } x_i - x_k \geq x_{N+1} \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\mathcal{D}u^{j+1} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix} u^{j+1} + \begin{pmatrix} a_3(1 - e^{-(A+\Delta x)}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Du^{j+1} + R_1$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = \left( \frac{\eta}{(\Delta x)^2} - \frac{\eta - \hat{\alpha}}{\Delta x} \right) & \text{ou} & \frac{\eta}{(\Delta x)^2} \\ a_2 = -\left( \frac{2\eta}{(\Delta x)^2} - \frac{\eta - \hat{\alpha}}{\Delta x} + \hat{\lambda} \right) & \text{ou} & -\left( \frac{2\eta}{(\Delta x)^2} + \frac{\eta - \hat{\alpha}}{\Delta x} + \hat{\lambda} \right) \\ a_3 = \frac{\eta}{(\Delta x)^2} & \text{ou} & \left( \frac{\eta}{(\Delta x)^2} + \frac{\eta - \hat{\alpha}}{\Delta x} \right) \end{cases}$$

et pour  $N$  pair, on écrit la matrice pour  $N = 10$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}u^j &= \begin{pmatrix} \lambda_6 e^{x_6} & \lambda_7 e^{x_7} & \cdots & \lambda_{11} e^{x_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_5 e^{x_5} & \lambda_6 e^{x_6} & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 e^{x_1} & \lambda_2 e^{x_2} & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \lambda_{11} e^{x_{11}} \\ 0 & \lambda_1 e^{x_1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{10} e^{x_{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 e^{x_1} & \ddots & \ddots & \lambda_7 e^{x_7} \end{pmatrix} u^j + R_2 \\ &= Ju^j + R_2 \end{aligned}$$

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta T} = Du^{j+1} + Ju^j + R$$

qui est équivalent à écrire

$$u^{j+1} = (Id - \Delta T D)^{-1} (Id + \Delta T J) u^j + \Delta T (Id - \Delta T D)^{-1} R \quad (5.24)$$

Par la même méthode de différences finies et sur la même grille construite pour la résolution de l'équation (5.2.1), on résoud le système (5.14) dont la solution  $P(T, x)$  est la fonction d'état adjointe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial T} = -\eta \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \right\} + \int \nu(dy) e^y \{ -P(T, x+y) + P(t, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial P}{\partial x} \} \\ \quad + 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} (u(T, x) - u^*(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i} \\ P(T_{max}, x) = 0 \\ P(T, +\infty) = P(T, -\infty) = 0 \end{array} \right.$$

On le met sous la forme d'une équation de type forward : pour cela on effectue la transformation suivante  $P_1(T, x) = P(T_{max} - T, x)$ .

On prend  $\nu(dy) = h^2(y)dy \in \mathcal{D}$ ,  $P_1$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial T} = \mathcal{D}_1 P_1 + \mathcal{J}_1 P_1 - e(T, x) \\ P_1(0, x) = 0 \\ P_1(T, +\infty) = P_1(T, -\infty) = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 P_1 &= \eta \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + (\eta - \alpha) \frac{\partial P_1}{\partial x} - \lambda P_1 \\ \mathcal{J}_1 P_1 &= \int_R h^2(y) e^y P_1(T, x+y) dy \end{aligned}$$

et

$$e(T, x) = 2 \sum_{i \in \mathcal{I}} (u(T, x) - u^*(T_i, x_i)) \delta_{T_i, x_i}$$

où  $\lambda$  et  $\alpha$  sont les même que pour (5.21)

$$\lambda = \int h^2(y) e^y dy \quad \text{et} \quad \alpha = \int h^2(y) (e^y - 1) dy$$

Après la résolution du système (5.2.1), on pourra donner une estimation  $e_i^j$  de  $e(T_j, x_i)$  sur la grille de différences finies, soit :

$$e_i^j = (u(T_j, x_i) - u^*(T_j, x_i)) \delta_{i \in \mathcal{I}} \quad (5.25)$$

Par suite, si on note par  $\{P_{1,i}^j\}$  l'estimation de  $P_1(T_j, x_i)$  la solution de (5.2.2) sur la grille au point  $(T_j, x_i)$  avec la méthode de différences finies ; alors  $P_{1,i}^j$  est solution de :

$$\frac{P_{1,i}^{j+1} - P_{1,i}^j}{\Delta T} = (\mathcal{D}_1 P_1^{j+1})_i + (\mathcal{J}_1 P_1^j)_i - 2 \times e_i^j$$

ce qui donne

$$P_1^{j+1} = (Id - \Delta T D_1)^{-1} (Id + \Delta T J_1) P_1^j - 2 \times (Id - \Delta T D_1)^{-1} e^j \quad (5.26)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i^j = 2 (u_i^j - u^*(T_j, x_i)) \delta i, j \in \mathcal{I} \\ (u_i^j)_{i,j} \text{ solution de (5.24)} \\ (D_1 P_1^{j+1})_i = \eta \left( \frac{\partial^2 P_1^{j+1}}{\partial x^2} \right)_i + (\eta - \hat{\alpha}) \left( \frac{\partial P_1^{j+1}}{\partial x} \right)_i - \hat{\lambda} P_1^{j+1} \\ (J_1 P_1^j)_i = \Delta x \sum_{k=1}^{k=N} h^2(x_k) e^{x_k} P_1^j(x_i + x_k) \\ P_1^j(x_i + x_k) = 0 \text{ si } (x_i + x_k) \notin [-A, A] \end{array} \right.$$

On pose alors  $P_i^j$  l'estimation de  $P(T_j, x_i)$  sur la grille de différences finies donnée par :

$$P_i^j = P_{1,i}^{M-j} \quad (5.27)$$

La convergence de cette méthode de différences finies pour la résolution de ce type d'équation intégral-différentielle est faite dans [28], on résume son résultat dans cette proposition.

**Proposition 5.2.2.1** *Le schéma de différences finies utilisé pour la résolution des systèmes (3.34), (5.14) converge vers la solution dans le cas continue, dans le sens suivant :*

$$\sup_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M} |u(T_j, x_i) - u_i^j| \leq C(\Delta T + \Delta x) \quad (5.28)$$

### Exemple 5.2.2.1

On montre ce résultat de convergence de la méthode de différences finies pour la résolution de l'équation (3.34) sur deux types de processus de Lévy de l'espace  $\bar{\mathcal{D}}_1$ . On compare les prix donnés par différences finies à ceux calculés avec la méthode de Transformée de Fourier [50].

1) Le modèle de Merton [53] est un processus de Lévy dans l'espace  $\bar{\mathcal{D}}_1$  avec volatilité  $\sigma > 0$  et une mesure de Lévy à densité

$$\nu(dy) = h^2(y) dy = \frac{\lambda}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-\theta)^2}{2\delta^2}} dy \quad (5.29)$$

satisfait à la condition  $E(|S_t|) < \infty$  de la proposition (3.25) donc l'équation forward (3.34) est valide pour ce cas.

La figure (5.1) compare les volatilités implicites obtenues à partir des prix calculés par la formule (5.24) à celle obtenues à partir des prix calculés par la méthode de la transformée de Fourier utilisée dans l'algorithme de calibration donné dans [62].

2) Un deuxième exemple de modèle qui entre dans le cas étudié dans ce travail est le modèle de Kou [46]. En effet, le processus de Lévy de Kou est paramétrisé par une volatilité  $\sigma > 0$  et une mesure donnée par

$$\nu(dy) = h^2(y)dy = (p\lambda_+ e^{-\lambda_+ y} 1_{y>0} + (1-p)\lambda_- e^{-\lambda_- |y|} 1_{y<0})dy \quad (5.30)$$

qui satisfait aussi aux hypothèses de la proposition (3.25). La figure (5.1) compare la méthode de différences finies (5.24) à celle de la transformée de Fourier.

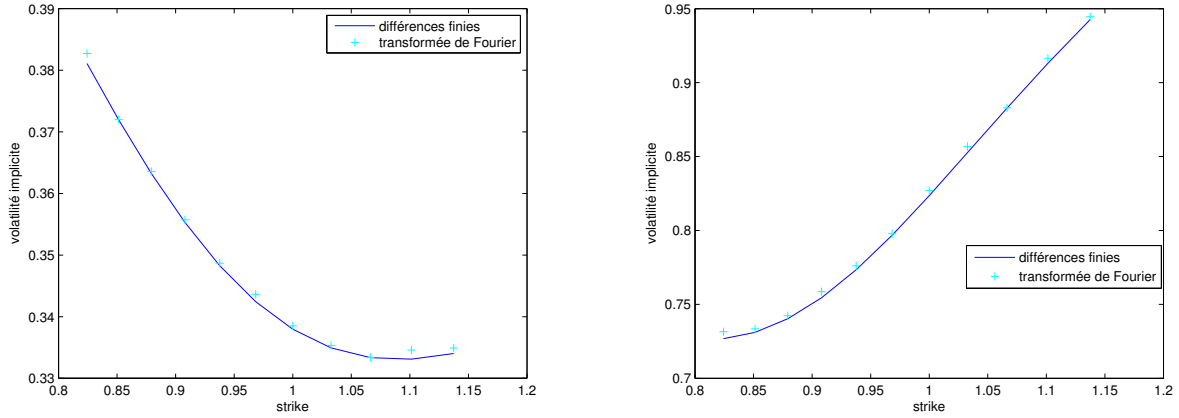


FIG. 5.1 – Comparaison de volatilité implicite entre la méthode de différences finies et celle de la transformée de Fourier. A Gauche : Modèle de Merton. A Droite : Modèle de Kou.

Cette méthode de différences finies et le résultat de convergence du lemme précédent, restent applicables pour une classe plus large de modèles. Pour plus de détails, voir [27].

### 5.2.3 Calcul numérique du gradient

Après avoir choisi le terme de régularisation  $\alpha(\delta)$  en utilisant le principe de *Morozov* (4.42), ce qui est équivalent à dire que le minimum  $(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)$  de la fonction Tikhonov

$$J_\alpha(\eta, h) = \sum |u^{\eta, h}(T_i, x_i) - u^\delta(T_i, x_i)|^2 + r_\alpha(\eta, h)$$

où  $r_\alpha(\eta, h)$  est un terme de régularisation, satisfait les conditions du théorème de Tikhonov, le terme de régularisation  $r_\alpha$  peut être pris dans un cas plus général

comme une fonction positive concave sur  $\bar{\mathcal{D}}_1$ , vérifie

$$\delta \leq \|Y^\delta - F(\eta_\alpha^\delta, h_\alpha^\delta)\| \leq c_1 \delta$$

À partir des formules (5.16 et 5.17), on a écrit  $\nabla J_\alpha = (\nabla_\eta J_\alpha, \nabla_h J_\alpha)$  sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & \nabla_\eta J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h') \\ &= -2\eta' \int_{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}(T, x) P(T, x) dT dx + \nabla_\eta r_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \nabla_h J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h') \\ &= - \int_{\mathcal{Q}} \int_R h(y) h'(y) e^y dy \left\{ u(T, x - y) - u(T, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} P(T, x) dT dx \\ & \quad + \nabla_h r_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h') \end{aligned}$$

pour tout  $(\eta, h) > 0$  et  $(\eta', h') \in \bar{\mathcal{D}}_1$ .

On remarque que dans ces deux expressions, que le gradient de la fonction  $J_\alpha$  s'exprime uniquement à partir des fonctions prix  $u$  et état adjoint  $P$ . Or les fonctions  $u$  et  $P$  sont déjà calculées sur la grille de différences finies donc il nous reste qu'à estimer ces deux intégrales.

On commence par l'estimation du premier gradient, qui est le plus simple.  $\nabla_\eta J_\alpha$  est une intégrale sur  $\mathcal{Q}$  qu'on peut approcher par la méthode des trapèzes sur la grille qu'on a utilisé pour la résolution des EDPI par la différences finies. Soit alors l'approche suivante :

$$\begin{aligned} & \nabla_\eta J_\alpha - \nabla_\eta r_\alpha \\ & \approx -2\Delta x \Delta T \eta' \sum_{i,j=1}^{N,M} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}(x_i, T_j) P(x_i, T_j) \end{aligned}$$

En utilisant des estimations de type différences finies pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \nabla_\eta J_\alpha - \nabla_\eta r_\alpha \\ & \approx -2\eta' \Delta x \Delta T \sum_{i,j=1}^{N,M} \left( \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} \right) P_i^j \end{aligned}$$

avec  $u_i^j$  est solution de (5.24) et  $P_i^j$  solution de (5.27).

Si on prend le terme de régularisation  $r_\alpha(\eta, h) = \alpha \|(\eta - \bar{\eta}, h - \bar{h})\|_{\bar{\mathcal{D}}_1}^2$  avec  $\alpha$  choisie à partir du principe de Morozov, alors :

$$\nabla_\eta J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h') \approx$$



$$-2\eta' \Delta x \Delta T \sum_{i,j=1}^{N,M} \left( \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} \right) P_i^j + 2(\eta - \bar{\eta}) \cdot \eta' \quad (5.31)$$

qui peut être écrit sous forme matricielle.

Pour la deuxième composante du gradient de  $J_\alpha$  qui donne sa dérivée par rapport à  $h$  (qui représente la racine carrée du densité de la mesure de saut).  $\nabla_h J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', h')$  donné par (5.17) est constitué d'une intégrale triple sur  $\mathcal{Q} \times R$ . Sans perte de généralité (puisque  $h$  et  $h'$  sont dans  $\mathcal{D}$ , donc ils convergent vers 0 à l'infini), on peut localiser  $h$  et  $h'$ , on prend alors :

$$\text{supp } h \text{ et } \text{supp } h' \subset [-A - \frac{1}{2}\Delta x, A + \frac{1}{2}\Delta x]$$

l'espace  $\mathcal{D}_1$  est de dimension infini, pour calculer la norme du gradient, il nous faut une paramétrisation de cet espace. Soit alors

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = \left\{ \sum a_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}[} \text{ avec } a_i \geq 0 \right\}$$

qui forme une partie dense dans  $\{h \in \mathcal{D}_1 \mid \text{supp } h = [-A - \frac{1}{2}\Delta x, A + \frac{1}{2}\Delta x]\}$ .

Alors

$$\|\nabla_h J_\alpha(\eta, h)\| = \sup_k |\nabla_h J_\alpha(\eta, h) \cdot (\eta', \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}[})|$$

donc, si on écrit  $h(y) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}[}$  alors

$$\begin{aligned} & \nabla_h J_\alpha \cdot (\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}[}) - \nabla_h r_\alpha (\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}[}) = \\ & -2 \int_{\mathcal{Q}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} h(y) e^y dy [u(t, x-y) - u(t, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x}] P(t, x) dx dt = \\ & -2 \sum_{i=1}^N a_i \int_{\mathcal{Q}} \int_{[x_i, x_{i+1}[ \cap [x_k, x_{k+1}[} e^y dy [u(t, x-y) - u(t, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x}] P(t, x) dx dt = \\ & -2a_k \int_{\mathcal{Q}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^y dy [u(t, x-y) - u(t, x) + (1 - e^{-y}) \frac{\partial u}{\partial x}] P(t, x) dx dt \\ & \approx -2a_k (x_{k+1} - x_k) \int_{\mathcal{Q}} e^{x_k} dy [u(t, x - x_k) - u(t, x) + (1 - e^{-x_k}) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)] P(t, x) dx dt \end{aligned}$$

Pour l'estimation de cette intégrale sur l'espace  $\mathcal{Q}$ , on utilise toujours la méthode des trapèzes pour l'estimation de cette intégrale et l'approche en différences finies pour  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . On déduit que :

$$\nabla_h J_\alpha \cdot \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}[} - \nabla_h r_\alpha \cdot \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}[} \approx$$

$$-2a_k \Delta T (\Delta x)^2 e^{x_k} \sum_{i,j=1}^{i,j=N+1} [u(T_j, x_i - x_k) - u(T_j, x_i) + (1 - e^{-x_k}) \frac{\partial u}{\partial x}(T_j, x_i)] P(T_j, x_i)$$

on obtient ainsi une expression de

$$\nabla_h J_\alpha \cdot 1_{[x_k, x_{k+1}[} - \nabla_h r_\alpha \cdot 1_{[x_k, x_{k+1}[}$$

en fonction des prix  $u_i^j$  et la solution état adjointe  $P_i^j$ , on rappelle que si  $x_i - x_k \leq -A$  on prend  $u(T_j, x_i - x_k) = 1 - \exp(x_i - x_k)$  et dans le cas où  $x_i - x_k \geq A$  on prend  $u(T_j, x_i - x_k) = 0$ .

Il nous reste à calculer le gradient du terme de régularisation  $\nabla_h r_\alpha(\eta, h) \cdot 1_{[x_k, x_{k+1}[}$ . Si on prend le cas de régularisation de Tikhonov étudié dans le chapitre (4), c'est à dire

$$r_\alpha(\eta, h) = \alpha \|(\eta - \bar{\eta}, h - \bar{h})\|_{\mathcal{D}_1}^2$$

alors

$$\nabla_h r_\alpha(h) \cdot h' = 2\alpha \langle h - \bar{h}, h' \rangle_{\mathcal{D}} = 2\alpha \int_R (h - \bar{h})(y) h'(y) (1 \wedge y^2) dy$$

En particulier si on prend  $h$  et  $\bar{h}$  données par :

$$h = \sum_i a_i 1_{[x_i, x_{i+1}[} \text{ et } \bar{h} = \sum_i \bar{a}_i 1_{[x_i, x_{i+1}[}$$

alors :

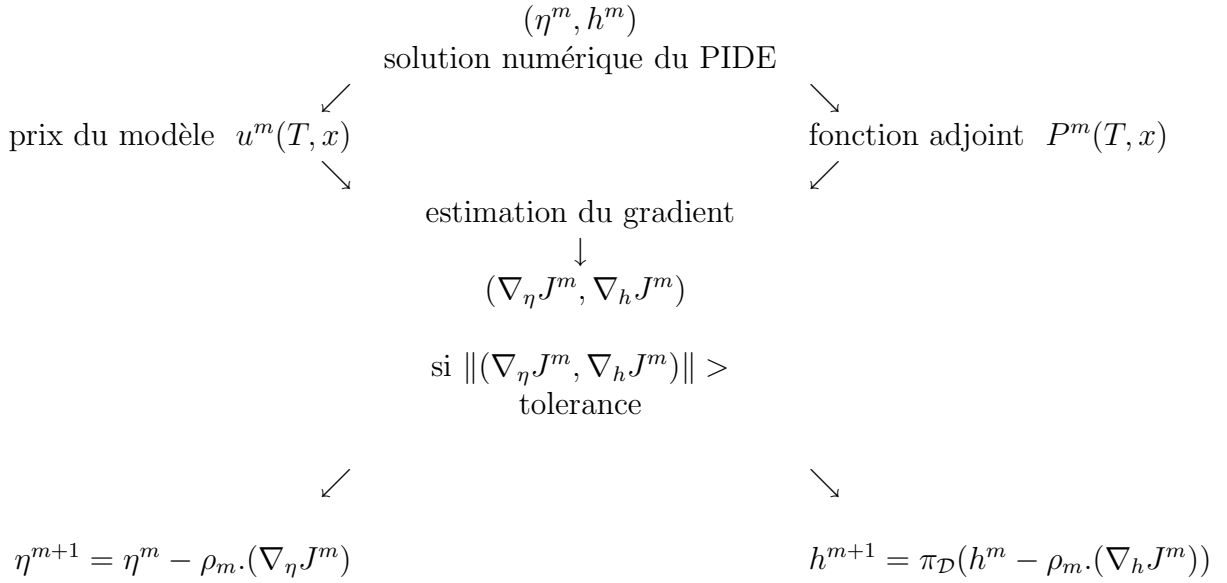
$$\begin{aligned} \nabla_h r_\alpha(h) \cdot 1_{[x_k, x_{k+1}[} &= 2\alpha (a_k - \bar{a}_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 \wedge y^2) dy \\ &\approx 2\alpha (a_k - \bar{a}_k) (x_{k+1} - x_k) (1 \wedge x_k^2) = 2\alpha (a_k - \bar{a}_k) \Delta x (1 \wedge x_k^2) \end{aligned}$$

On conclut alors :

$$\nabla_h J_\alpha(h) \cdot 1_{[x_k, x_{k+1}[} \approx$$

$$\begin{aligned} -2a_k \Delta T (\Delta x)^2 e^{x_k} \sum_{i,j=1}^{i,j=N+1} [u(T_j, x_i - x_k) - u(T_j, x_i) + (1 - e^{-x_k}) \frac{\partial u}{\partial x}(T_j, x_i)] P(T_j, x_i) \\ + 2\alpha (a_k - \bar{a}_k) (x_{k+1} - x_k) (1 \wedge x_k^2) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nous avons maintenant tous les éléments en place pour notre algorithme de gradient, on le résume par le schéma suivant :



## 5.3 Tests numériques de l'algorithme de calibration

On va tester notre algorithme de calibration (5.1.3) sur différents types d'observations. On commence par des observations simulées à partir de deux modèles qui vérifient les hypothèses de la proposition (3.25) et qui appartiennent aux sous ensemble  $\mathcal{D}_1$ . Dans un deuxième temps, on va tester notre algorithme (5.1.3) sur des observations données par le marché.

### 5.3.1 Tests sur des observations simulées

On prend deux modèles exponentielle-Lévy, dont les mesures de Lévy sont à densité et de volatilité  $\sigma > 0$ .

On commence par la calibration des observations générées par le modèle de Merton [53]. On simule des observations à partir du système (3.34) les valeurs de  $u$  en utilisant la méthode des différences finies, et on applique notre algorithme pour trouver des paramètres qui nous donnent les mêmes prix. On signale que la fonction prix

$$u^{T,x} : \bar{\mathcal{D}}_1 \rightarrow R_+ \quad (\eta, h) \longrightarrow u^{T,x}(\eta, h) \quad (5.33)$$

est non injective, par suite on attend pas de retrouver les paramètres utilisés pour trouver les observations mais plutôt chercher le processus de Lévy dans  $\bar{\mathcal{D}}_1$  le plus proche au prior  $(\bar{\eta}, \bar{h})$  qui donne les prix les plus proches à nos observations.

- Dans le premier exemple on prend des prix d’option pour une seule maturité  $T = 6\text{mois}$ . La figure (5.4) montre la convergence de la volatilité implicite pour 10 observations prises pour des prix d’exercices entre  $.7 \times S_0 \leq K \leq 1.4 \times S_0$ , la figure (5.5) montre la convergence de la constante de volatilité qui était prise  $\sigma = .4$  et la convergence de la mesure de Lévy correspondante. On remarque que la convergence de la volatilité est nettement meilleure que celle de la convergence de la mesure et ça s’explique par le fait que les prix sont plus sensibles aux variations de la volatilité que ceux des mesures.

Dans un deuxième temps, on effectue le même test sur 30 observations simulées à partir du même modèle de Merton pour 3 maturités différentes et 10 prix d’exercice, le graphe (5.7) montre la surface de volatilité implicite à calibrer et celle générée par les paramètres calibrés, la figure (5.6) montre la différence entre la volatilité implicite des observations et celle donnée par l’algorithme de calibration. On observe la même qualité de convergence pour les trois maturités.

- Dans un deuxième cas, on effectue les deux étapes du test précédent avec des observations simulées à partir d’un modèle de Kou [46]. On commence par 10 observations pour une même maturité  $T = 6\text{ mois}$ , la figure (5.2) montre la qualité de calibration fournie par l’algorithme (5.1.3) de calibration et la figure (5.3) montre la convergence de la volatilité  $\sigma$  et de mesure  $\nu(dy) = h^2(y)dy$ . Enfin, on termine par la calibration de 30 observations simulées à partir du même modèle pour 3 maturités différentes, la figure (5.9) donne la surface de volatilité implicite à calibrer et celle fournie par l’algorithme de calibration. On donne dans la figure (5.8) la différence entre les deux surfaces précédentes, ce qui nous donne une idée sur la qualité de calibration.

### 5.3.2 Test sur des données du marché

On considère maintenant un exemple d’observations de marché.

Il s’agit des données d’options sur SP500 utilisées pour la reconstruction de la surface de volatilité locale dans [22]. Dans cet exemple  $S_0 = 590\$$ , le taux d’intérêt  $r = .06$  et le taux de dividende  $q = .0262$ ; le tableau (5.10) donne les observations dont les maturités sont entre 2 mois et 5 ans, et prix d’exercice entre  $.85 S_0$  et  $1.4 S_0$ . On tente de trouver des paramètres  $(\sigma^*, h^*)$  de processus de Lévy qui génère ces observations.

La figure (5.12) donne la surface de volatilité implicite à calibrer et celle fournie par l’algorithme de calibration. On donne dans la figure (5.11) la qualité de calibration en illustrant la différence entre les deux surfaces de volatilité implicite. Un autre critère pour juger la précision de calibration est donnée par la l’erreur  $L^1$ ,

c'est à dire la différence absolue entre les prix calculés à partir du modèle et les observations :

$$e(\eta, h) = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u(\eta, h, T_i, x_i) - u^*(T_i, x_i)| \quad (5.34)$$

La figure (5.13) montre la convergence de cette fonction erreur  $e(.,.)$  au cours des itérations. Enfin, la figure (5.14) montre la convergence des paramètres du modèle, à savoir la mesure de Lévy  $\nu$  et la volatilité  $\sigma$ .

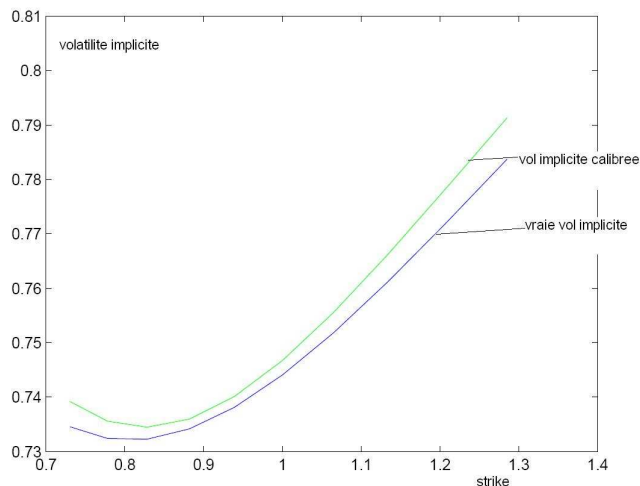


FIG. 5.2 – Convergence de la volatilité implicite sur des observations simulées à partir du modèle de Kou

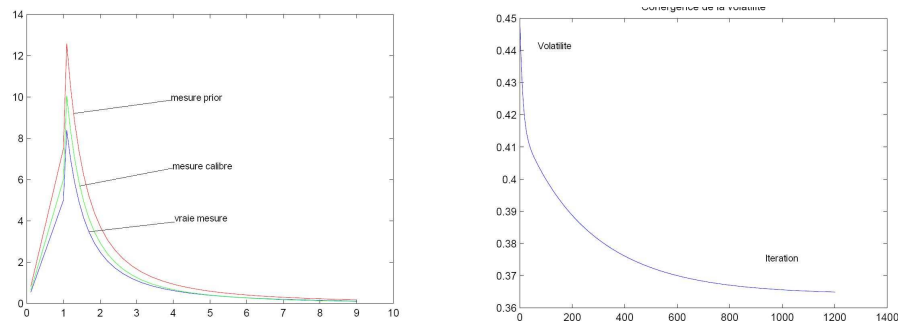


FIG. 5.3 – Paramètres retrouvés par algorithme de calibration à partir des observations simulées à partir du modèle de Kou. -A gauche : la mesure calibrée. -A droite, convergence de la volatilité.

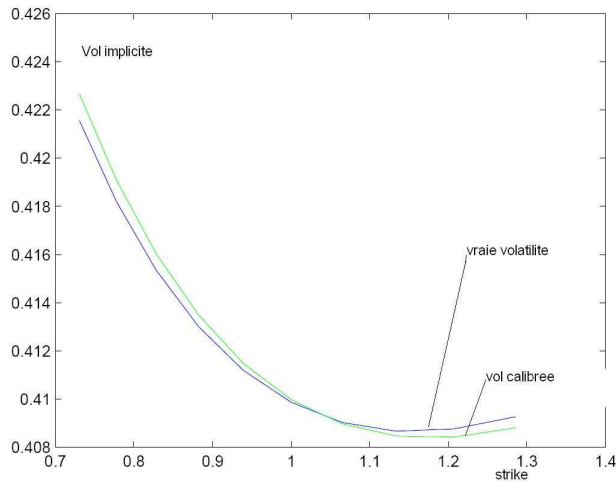


FIG. 5.4 – Convergence de la volatilité implicite sur des observations simulées à partir du modèle de Merton

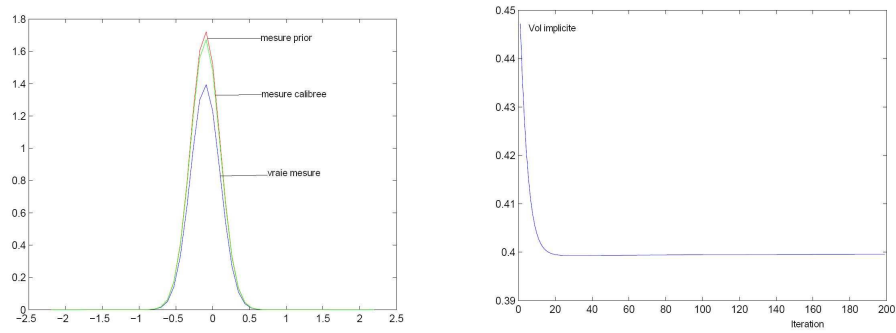


FIG. 5.5 – Paramètres retrouvés par algorithme de calibration à partir des observations simulées à partir du modèle de Merton. -A gauche : la mesure calibrée. -A droite : convergence de la volatilité.

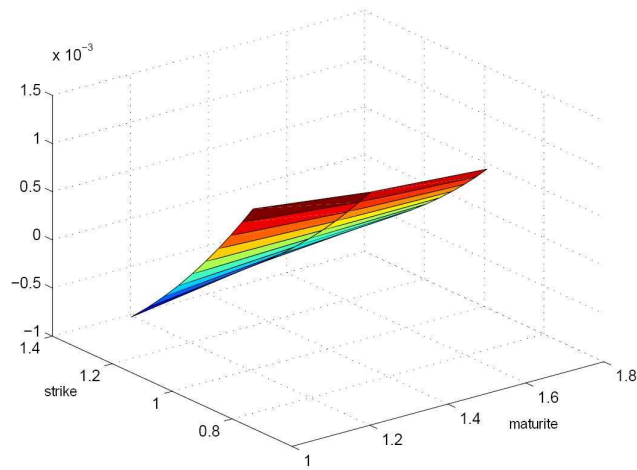


FIG. 5.6 – Convergence de la surface de volatilité implicite pour 3 maturités différentes

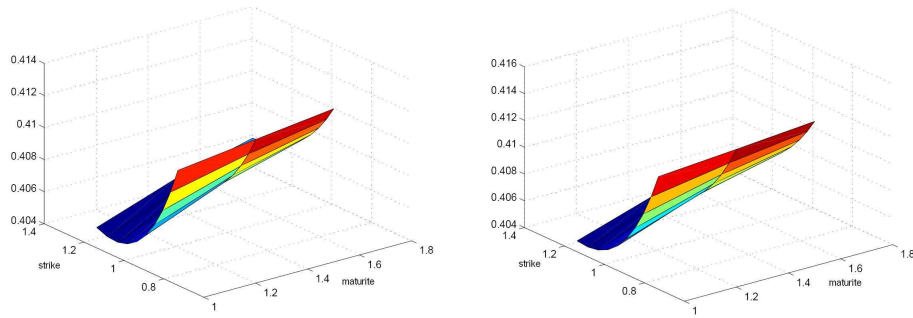


FIG. 5.7 – A gauche : surface de volatilité implicite de Merton. Droite : surface calibrée.

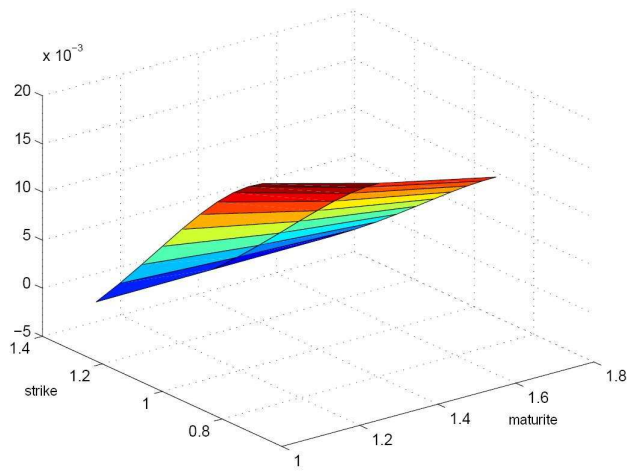


FIG. 5.8 – Convergence de la surface de volatilité implicite pour 3 maturités différentes

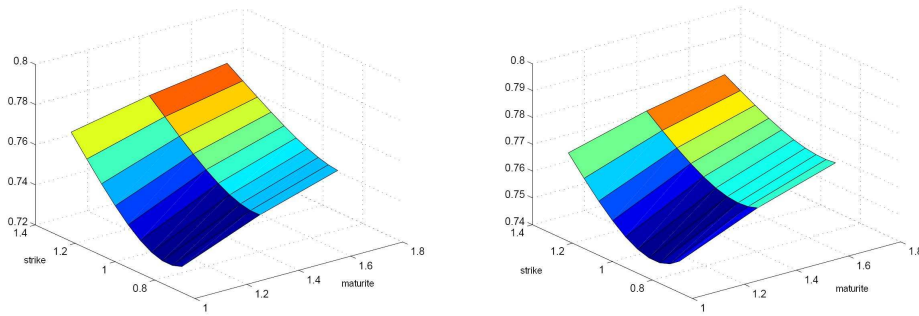


FIG. 5.9 – A gauche : surface de volatilité implicite de Kou. A droite : la surface calibrée.



Maturity (in years)	Strike (% of spot)									
	85%	90%	95%	100%	105%	110%	115%	120%	130%	140%
.175	.190	.168	.133	.113	.102	.097	.120	.142	.169	.200
.425	.177	.155	.138	.125	.109	.103	.100	.114	.130	.150
.695	.172	.157	.144	.133	.118	.104	.100	.101	.108	.124
.94	.171	.159	.149	.137	.127	.113	.106	.103	.100	.110
1	.171	.159	.150	.138	.128	.115	.107	.103	.099	.108
1.5	.169	.160	.151	.142	.133	.124	.119	.113	.107	.102
2	.169	.161	.153	.145	.137	.130	.126	.119	.115	.111
3	.168	.161	.155	.149	.143	.137	.133	.128	.124	.123
4	.168	.162	.157	.152	.148	.143	.139	.135	.130	.128
5	.168	.164	.159	.154	.151	.148	.144	.140	.136	.132

FIG. 5.10 – Volatilités implicites pour options sur indice S& P.

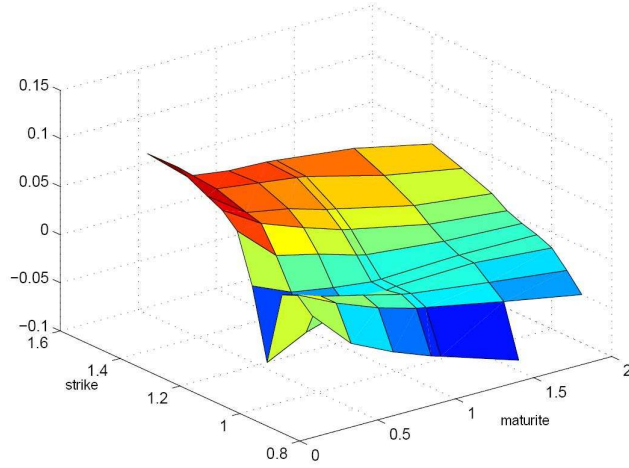


FIG. 5.11 – Différence entre volatilité implicite du modèle et celle observée sur le marché.

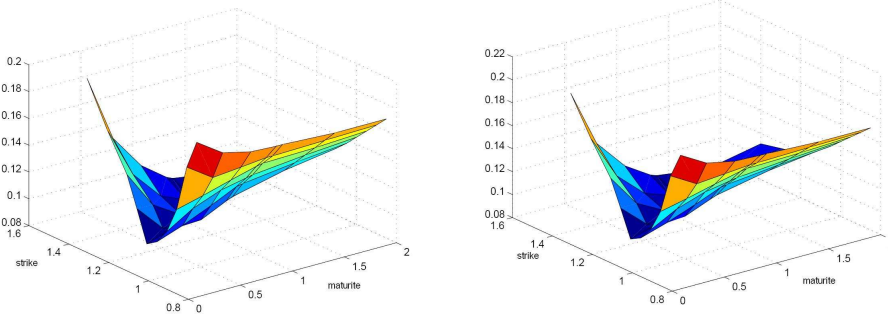


FIG. 5.12 – A gauche : la surface de volatilité implicite donnée par le marché. A droite : la surface calibrée.

## 5.4 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de calibration qui permet de reconstruire de façon nonparamétrique un processus de Lévy à partir de la minimisation de la fonctionnelle régularisée  $J_\alpha$  étudiée dans le chapitre (4).

Le calcul de la fonctionnelle se fait en résolvant une équation intégral-différentielle de type forward, semblable à l'équation de Dupire, qui évalue à un instant fixe  $t_0$  les options européenne de toute maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$ . Pour la minimisation de  $J_\alpha$ , nous avons utilisé une méthode de descente du gradient. La difficulté principale est dans le calcul du gradient (dérivées directionnelles) de la fonctionnelle : nous avons proposé de résoudre cette difficulté en écrivant le gradient de  $J_\alpha$

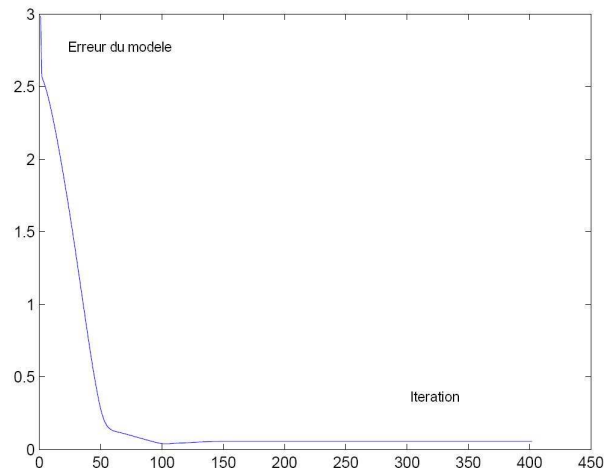


FIG. 5.13 – Convergence de la différence quadratique entre prix calculés par le modèle et prix observés sur le marché

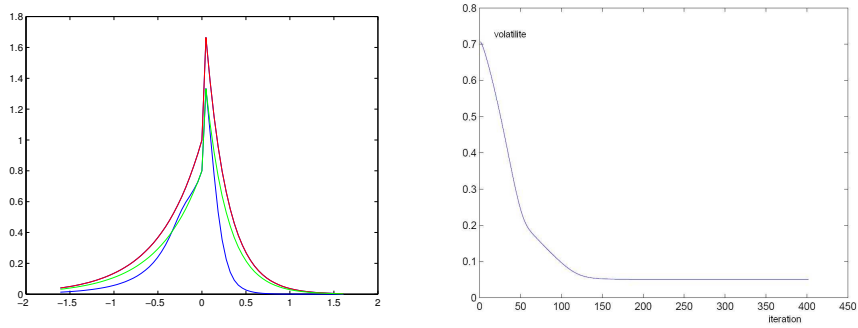


FIG. 5.14 – A gauche : mesure de Lévy calibrée. A droite : convergence de la constante de volatilité.

sous une forme intégrale qui contient uniquement la fonction prix  $u$  et la fonction d'état adjoint  $P$ , elle même solution d'une équation integrodifférentielle forward avec terme source. Notre algorithme de calibration consiste à résoudre ces deux équations intégro-différentielles et calculer deux intégrales par itération.

Cet algorithme peut être, comme dans l'étude théorique faite dans le chapitre (4), généralisé à une classe plus large de modèles comme celle des modèles à volatilité locale avec sauts (3.17) comme ceux étudiés par Andersen & Andreasen [4], combinant par exemple notre algorithme avec celui étudié par Crépey dans [30].

# Bibliographie

- [1] Achdou, Y. and Pironneau, O. :Volatility Smile by Multilevel Least Square, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* vol. 5, No. 2 (2002) 619–643.
- [2] Achdou, Y. and Pironneau, O. *Computational methods for option pricing*, SIAM, 2005.
- [3] Allaire, G. Analyse numérique et optimisation. *Département de Mathématiques Appliquées* (2005).
- [4] Andersen, L and Andreasen, J. Jump-diffusion models : Volatility smile fitting and numerical methods for pricing. *Rev. Derivatives Research*. Vol 4. pp 231-262 (2000).
- [5] Aronson, D.G. : Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967).
- [6] Avellaneda, M. Friedman, C. Holmes, R and Samperi, D. : Calibrating the volatility surfaces via relative entropy minimization, *Applied Mathematical Finance* Vol. 4 (1997) 37–64.
- [7] Belomestny, D and Reiss, M. Spectral calibration of exponential Lévy Models. *Finance and Stochastics*. Vol 10, No 4. pp 449-474 (2006).
- [8] BenHamida, S and Cont, R. Recovering volatility from option by evolutionary optimization. *Journal of Computational Finance*, Vol 8. Number 4. (2005).
- [9] Bensoussan, A and Lions,JL. *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles*. Dunod, Paris, 1982.
- [10] Berestycki, H. Busca, J and Florent, I. Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quantitative Finance*, Vol 2. pp 61-69 (2002).
- [11] Black, F and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities, *J. Pol. Econ.* 81 (1973).
- [12] Bonnans, J.F. Gilbert, J.C. Lemaréchal, C and Sagastizabal, C.A. *Numerical Optimization : Theoretical and Practical Aspects*. Springer-Verlag (2006).
- [13] Biagini, S. and Cont, R. (2006) Model-free representation of pricing rules as conditional expectations, in : Akahori, Ogawa & Watanabe (eds.) : *Stochastic processes and mathematical finance*, World Scientific.

- [14] Bonnans, J.F. Cognet, J.M and Volle, S. : Estimation de la volatilité locale d'actifs financiers par une méthode numérique. *Rapport N 4648 INRIA*, Novembre (2002).
- [15] Bodurtha, J.N and Jermakyan, M. Non parametric estimation of an implied volatility surface, *J. Comp. Fin. 2* Vol 4 (1999) 29–60.
- [16] Bouchouev, I and Isakov, V. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets, *Inverse Problems* Vol. 15 (1999) 95–116.
- [17] Breeden, D. and Litzenberger, R., Prices of State-Contingent Claims Implicit in Options Prices *Journal of Business*, 51, octobre : 621-651, (1987).
- [18] Briani, R and Natalini, R. Asymptotic high-order schemes for integro-differential problems arising in markets with jumps. *Commun.Math.Sci.* Vol 4, No 8. pp 81-96 (2006).
- [19] Carr, P. and Wu, L. : What type of Process underlies options ? A Simple Robust Test. *The Journal of Finance*, Volume LVIII, No. 6, 2581-2610 (2003).
- [20] Carr, P, German, H and Madan, D.B. From Local Volatility to local Lévy Models. *Quantitative Finance*, V 4. pp 581-588 (2004).
- [21] Carr, P and Hirs, A. : Why Be Backward ? Forward Equations for American Options. *Risk*, pp 103-107, January 2003.
- [22] Coleman, Li and Verma. Reconstructing the unknown volatility function. *Journal of Computational Finance*, Vol 2. pp 77-102 (1999).
- [23] Cont, R. and Tankov, P., *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall / CRC Press, (2004).
- [24] Cont, R. and Tankov, P., Nonparametric calibration of jump-diffusion option pricing models *Journal of Computational Finance*, 7(3) : 1-49, 2004.
- [25] Cont, R. and Tankov, P. Recovering exponential Lévy models from option prices : regularization of an ill-posed inverse problem *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol 43, 2006.
- [26] Cont, R. Tankov, P and Voltchkova, E. : Hedging options in presence of jumps, in : Benth, F.E. ; Di Nunno, G. ; Lindstrom, T. ; Ksendal, B. ; Zhang, T. (Eds.) *Stochastic Analysis and Applications : The Abel Symposium 2005 in honor of Kiyosi Ito*, Springer 2007, pages 197-218.
- [27] Cont, R. and Voltchkova, E., Integro-differential equations for option prices in exponential Lévy models, *Finance and Stochastics*, Volume 9, Number 3 (2005), pp. 299–325.
- [28] Cont, R. and Voltchkova, E., Finite difference methods for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Volume 43, Number 4 (2005), pp. 1596–1626.

- [29] Crépey, S. Calibration of the local volatility in a generalized Black-Scholes model using Tikhonov regularization , *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Vol 34 No 5 (2003).
- [30] Crépey, S. Calibration of the volatility in a trinomial tree using Tikhonov regularization. *Inverse Problems*. Vol 19. pp 91-127 (2003).
- [31] Crépey, S. Contribution à des méthodes numériques appliquées à la finance et aux jeux différentiels. *PhD . thesis. Ecole polytechnique* (2001).
- [32] Lamberton, D and Lapeyre, B. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. *Ellipses, Paris* (1999).
- [33] Derman, E. and Kani, I. Riding on a smile, *Risk Magazine* Vol. 7 (1994) 32–39.
- [34] Dupire, B., Pricing with a smile *RISK*, 7 : 18-20, 1994.
- [35] Egger, H and Engl, H.W. Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing : Convergence analysis and rates. *Inverse Problems*. Vol 21. pp 1027-1045 (2005).
- [36] El Karoui, N, Jeanblanc-Picqué, M and Shreve, S., Robustness of the Black and Scholes Formula. *Mathematical Finance* 8, pp. 93-126 (1998).
- [37] El Karoui, N. (2003) *Couverture des risques dans les marchés financiers*, Cours de Master, Ecole Polytechnique
- [38] Engl, H.W, Kunisch, K and Neubauer, A. Regularization of Inverse Problems. *Kluwer, Dordrecht* (1996).
- [39] Engl, H.W, Kunisch, K and Neubauer, A. Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems*. Vol 5. pp 523-540(1989).
- [40] Friedman, A. Partial differential equations of parabolic type, *Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall* (1964).
- [41] Fouque J.P., Papanicolaou G. & Sircar, K.R. (2002) *Option pricing under stochastic volatility*, Cambridge University Press.
- [42] Glasserman, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer (2003).
- [43] Hein, Th. (2005) On Tikhonov Regularization for the Inverse Problem of Option Pricing in the Price Dependent Case, *Journal for Analysis and its Applications*, Volume 24, No. 3, 593–609.
- [44] Jackson, N. Suli, E and Howison, S. : Computation of Deterministic Volatility surfaces *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, Number 2, 1998-99, 5-32.
- [45] B. Jourdain, Stochastic flows approach to Dupire’s formula, *Finance and Stochastics* 11(4), pp 521-535, 2007.
- [46] Kou, S. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*. Vol 48. pp 1086-1101 (2002).

- [47] Krylov, N.V. *Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the second order*, D. Reidel Publishing Company (1987).
- [48] Lagnado, R and Osher, S. A technique for calibrating derivative security pricing models : numerical solution of inverse problem. *J. Comput. Finance*. Vol 1. pp 13-25 (1997).
- [49] Luis J.Roman,Xinshing Zhang and Weian Zheng. Rate of convergence in Homogenization of Parabolic PDEs. *Math.Phys.Anal.Geom.* Vol 6, No 2. pp 113-124 (2003).
- [50] Madan, D. Financial modeling with discontinuous price processes, in : Lévy Processes - Theory and Applications (2001).
- [51] Matache, A.M. Petersdorff, V and Schwab, C. Fast deterministic pricing of options on Lvy driven assets, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* Vol. 38 No. 1 (2004) 37–72.
- [52] Menaldi, J.L and Garroni, M.G. *Green Functions for Second Order Parabolic Integro-Differential Problems*, Research Notes in Mathematics 275, Longman Scientific and Technical, Essex, 1992, 417pp. ISBN 0-582-02156-1.
- [53] Merton, R. Option pricing when underlying stock returns are discontinous. *J.Financial Economics*. Vol 3. pp 125-144 (1976).
- [54] Morozov, V.A. The error principle in the solution of operational equations by the regularization method. *USSR Comp Math Math Phys*. Vol 8. pp 63-87 (1968).
- [55] Papanicolaou, G. C.; Stroock, D.; Varadhan, S.R.S. : Martingale approach to some limit theorems. Papers from the Duke Turbulence Conference (Duke Univ., Durham, N.C., 1976).
- [56] Protter, P. *Stochastic integration and differential equations*, Berlin, 1990.
- [57] Sato, K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. *Cambridge University Press*, Press, Cambridge, UK (1999).
- [58] Ramlau, R. Regularization of Nonlinear Ill-posed Operator Equations : Methods and Applications. *Habilitation Thesis, University of Bremen, Germany*, (2003).
- [59] Ramlau, R. A modified Landweber-method for inverse problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. Vol 20 (1999).
- [60] Ramlau, R. Morozov's Discrepancy Principe for Tikhonov regularization of nonlinear operators. *Journal for Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol.23. 147-172 (2002).
- [61] Ramlau, R. A steepest descent algorithm for the global minimization of the Tikhonov-functional. *Inverse Problems*. Vol 18, pp 381-405 (2002).
- [62] Tankov, P. (2004) *Processus de Lévy en finance : Problèmes inverses et modélisation de dépendance*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.



- [63] Tikhonov, A.N. and Arsenin, V. (1973) *Résolution de problèmes mal posés*. Moscou : Mir.
- [64] Tikhonov, A.N, Goncharsky, A.V, Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. *Numerical Methodes for the Solution of Ill-Posed Problems*, Kluwer Academic Publishers (1995).